

N° d'enregistrement au C.N.R.S. A.O. 11. 904

THÈSE

présentée

*A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON*

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR INGÉNIEUR

par

Rémi BRENDÉL

BRUIT INTERNE DES OSCILLATEURS A QUARTZ

Soutenue le 18 octobre 1975, devant la Commission d'Examen :

MM. P. MESNAGE

Président

J. UEBERSFELD

R. CHALEAT

M. OLIVIER

R. BESSON

Examineurs

THÈSE
A L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX
FACULTÉ DES SCIENCES
DIPLOME DE DOCTEUR-INGÉNIEUR
SCIENCE STENDRE
BOBET INSTITUTE FOR SCIENCE & SOCIETY



Digitized by the Internet Archive
in 2026

N° d'enregistrement au C.N.R.S. A.O. 11. 904

THÈSE

présentée

*A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON*

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR INGÉNIEUR

par

Rémi BRENDÉL



BRUIT INTERNE DES OSCILLATEURS A QUARTZ

Soutenue le 18 octobre 1975, devant la Commission d'Examen :

MM. P. MESNAGE

Président

J. UEBERSFELD

R. CHALEAT

M. OLIVIER

R. BESSON

Examineurs

THÈSE

LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE BRUXELLES

PRÉSENTE

DIPLOME DE DOCTEUR INGÉNIEUR



PAR

LE

LE 10 JANVIER 1960

PAR

LE

LE

LE

LE

LE

U N I V E R S I T E D E B E S A N C O N

Président : Monsieur THIEBAUT Jean

FACULTE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

DOYEN

Mr BERNARD Jean : Chimie Physique
Professeur

ASSESSEUR

Mr PARIZET Jean : Mathématiques
Professeur

DOYENS HONORAIRES

Mrs GLANGEAUD, JACQUEMAIN, CHATELET, THIEBAUT

PROFESSEURS HONORAIRES

Mrs BAILLAUD, DUFFIEUX, THIRY, TRILLAT,
UEBERSFELD, VINCENSINI, DREYFUSS,
TRONCHET, THEOBALD N.

MAITRE DE CONFERENCES HONORAIRE

Mr GRANIER

PROFESSEURS

Mrs CHATELET François
MESNAGE Pierre
PERROT Roger
PLUVINAGE Philippe
QUANTIN André
CHALEAT Raymond
RIPPLINGER Jean
GREMILLARD Jean
VIENOT Jean-Charles
THIEBAUT Jean
GOMOT Lucien
BENNETON Gaston
GALATRY Louis
THEOBALD Jean-Gérard
CERUTTI Ernest
DEVIN Claude
CAPODANNO Pierre
BANTEGNIE Robert
ROBERT Daniel
ROBERT Jacques
CHAUVE Pierre
RANGHEARD Yves

Mathématiques
Chronométrie
Chimie Générale
Physique Théorique
Pédologie
Mécanique Appliquée
Physiologie animale
Mathématiques
Physique Gle-Optique
Pétrographie-Minéralogie
Zoologie et Embryologie
Mathématiques
Physique Moléculaire
Spectroscopie Hertzienne
Chimie Appliquée
Chimie 1er cycle
Mécanique Théorique
Mathématiques
Physique Moléculaire
Mathématiques I
Géologie-Minéralogie
Géologie

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mrs POTIER Robert	Physique des Solides
REAL Pierre	Ecologie animale
GOUARNE René	Mathématiques
MERIGOUX Henri	Cristallographie et Synthèses minérales
OLIVIER Marcel	Electronique Quantique
MONTAGNER Hubert	Psychophysiologie
BULABOIS Jean	Physique Gle-Optique
GAUDEMER Yves	Biochimie
LAUDE Bernard	Chimie Organique
MIELLOU Jean-Claude	Analyse Numérique
ROBERT Guy	Electrochimie

MAITRES DE CONFERENCE

Mrs BIDAULT Michel	Taxonomie Expérimentale
DUBOUCHET Jacques	Botanique
MARLE Charles	Mathématiques
WEIL Michel	Mathématiques
HAYLI Avram	Astronomie
BROQUET Paul	Géologie
GRAS Georges	Mathématiques
TREHEL Michel	Informatique

CHARGE D'ENSEIGNEMENT

Mr MILLET Bernard

RESPONSABLE DES SERVICES ADMINISTRATIFS

Mr RUNGE Jean-Marie

PROFESSEUR SANS CHAIRE DE L'E.N.S.C.M.B.

Mr LHOTE François

MAITRE DE CONFERENCES DE L'E.N.S.C.M.B.

Mr BESSON Raymond

A ma femme

à ma fille

BRUIT INTERNE
DES OSCILLATEURS À QUARTZ

Le travail a été effectué au Laboratoire de Physique et
Mathématiques des Collèges de l'Université de la Colombie Britannique.

Je remercie tout d'abord Monsieur le Directeur Adriel G.
L.H.S. de m'avoir permis pendant deux ans de suivre d'importantes ex-
périences de terrain et de m'avoir donné d'importantes recommandations au L.P.M.C.

Le sujet de cette thèse m'a été confié par Monsieur GIBBELL,
Directeur du L.P.M.C., Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, qui
je remercie pour les conseils et le soutien qu'il m'a prodigués tout au
long de ce travail.

Monsieur VÉRON, Directeur de l'École Nationale Supérieure de
Géométrie et de Mécanique, Professeur à la Faculté des Sciences
de Besançon, trouve ici mes remerciements pour avoir bien voulu se faire
l'honneur de présider le Jury.

Le travail a été mené à bien grâce à la présence constante et
aux avis précieux de Monsieur OLIVIER, Professeur à la Faculté des Sciences
de Besançon. Je lui exprime ici ma plus profonde reconnaissance.

Les méthodes de la mécanique non-linéaire m'ont été enseignées
par Monsieur CHALEAT, Directeur du Laboratoire de Mécanique Appliquée,
Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon, qui a bien voulu faire
partie du Jury. Je lui exprime, dans ces lignes, toute ma gratitude.

Je remercie Monsieur BEGON, Maître de Conférences à l'E.N.S.C.M.,
d'avoir bien voulu examiner ce travail et faire partie du Jury ainsi que
pour les encouragements et le soutien qu'il m'a apportés.

Pendant deux ans, j'ai travaillé avec J.-P. BALBI, Maître-
Assistant agrégé à la Faculté des Sciences de Besançon et c'est en appli-
quant les méthodes d'analyse des systèmes différentiels non-linéaires qu'il
m'a enseignées que j'ai pu conclure ce travail à son terme. Il trouvera ici
mes plus sincères remerciements.

Je n'aurai garde d'oublier de remercier Gilles MARIANNEAU, Ingénieur C.N.R.S., pour la part essentielle qu'il a prise dans l'aspect expérimental de cette recherche.

Je remercie les autres chercheurs du L.P.M.O., en particulier Monsieur GROSLAMBERT, Docteur-Ingénieur au C.N.R.S., pour les nombreux échanges de vue et les discussions souvent passionnés mais toujours fructueux.

La dactylographie de ce texte a été confiée à Madame HISLEUR qui s'est acquittée de sa tâche, souvent très difficile, avec une habileté, une compétence et une gentillesse que je voudrais souligner ici avec reconnaissance.

TABLE DES MATIERES

pages

INTRODUCTION

PREMIERE PARTIE

CHAPITRE 1 - LES OSCILLATEURS

1.1 - Les oscillateurs sinusoïdaux	1
1.2 - Oscillateurs sinusoïdaux à transistors	2
1.3 - Oscillateurs classiques à transistors	3
1.4 - Les oscillateurs à quartz	6
1.5 - Schéma équivalent d'un oscillateur à quartz	8
1.6 - Equation de fonctionnement	14

CHAPITRE 2 - LE BRUIT DANS LES OSCILLATEURS

2.1 - Rappels sur les processus stochastiques	16
2.2 - Origine du bruit	24
2.3 - Bruit d'un oscillateur	28

CHAPITRE 3 - CARACTERISATION DES OSCILLATEURS

3.1 - Signal d'un oscillateur	32
3.2 - Modulation d'un signal	33
3.3 - Spectres d'un signal	35
3.4 - Spectres expérimentaux	42
3.5 - Principaux types d'analyse du signal	46

CHAPITRE 4 - LE RESONATEUR

4.1 - Schéma équivalent du résonateur à quartz	52
4.2 - Réponse du résonateur à une excitation extérieure	54
4.3 - Détermination des fréquences caractéristiques du résonateur	60

CHAPITRE 5 - ETUDE DE L'AUTOOSCILLATEUR

5.1 - L'oscillateur non perturbé	64
5.2 - L'autooscillateur perturbé	70
5.3 - Justification de la méthode	75

DEUXIEME PARTIE

CHAPITRE 6 - METHODE DE LA MOYENNE

6.1 - Introduction	77
6.2 - Théorème de Haag	77
6.3 - Fonctions diversifiables	78
6.4 - Principe de la méthode	79
6.5 - Mise sous forme standard	82
6.6 - L'oscillateur de Van der Pol	84
6.7 - Influence de la capacité parallèle	87

CHAPITRE 7 - METHODE DE LA LINEARISATION EQUIVALENTE

7.1 - Introduction	91
7.2 - Principe de la méthode	92
7.3 - Application à l'oscillateur de Van der Pol	97
7.4 - Application au troisième terme de l'équation (5.6)	99

CHAPITRE 8 - SPECTRES D'UN OSCILLATEUR PERTURBE

8.1 - Position du problème	104
8.2 - Mouvement de l'oscillateur perturbé	105
8.3 - Spectres des perturbations	110
8.4 - Modulation à l'entrée	111
8.5 - Modulation à la sortie	113

TROISIEME PARTIE

CHAPITRE 9 - METHODES EXPERIMENTALES COMPARAISON DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

9.1 - Détermination des paramètres du quartz	116
9.2 - Description des oscillateurs utilisés	119
9.3 - Détermination des caractéristiques de l'oscillateur 5 MHz	121
9.4 - Mesure des spectres	123
9.5 - Remarques concernant le neutrodynage de la capacité parallèle	126
9.6 - Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux	130

CONCLUSION

ANNEXE

INTRODUCTION

La réalisation d'une base de temps idéale, c'est-à-dire la construction d'un oscillateur délivrant un signal parfaitement harmonique est un problème impossible à résoudre. Le mouvement naturellement désordonné des électrons dans la matière, provoquant le *bruit de fond*, constitue la barrière ultime à la stabilité absolue des oscillateurs électroniques.

Les oscillateurs à quartz étant sans doute à l'heure actuelle les oscillateurs électroniques réalisant les meilleures performances, nous nous sommes intéressé plus spécialement à ces dispositifs.

Le but de notre travail n'était pas tant de déterminer l'origine des bruits qui affectent la pureté spectrale de l'oscillateur à quartz que de comprendre *comment* ces perturbations modifient le spectre du signal de sortie ; c'est pourquoi notre approche du problème a été volontairement *causale* : nous nous sommes donné *a priori* un modèle d'oscillateur et un modèle de bruit et nous avons analysé les caractéristiques du signal perturbé.

L'expérience sert alors de juge pour la validité des modèles choisis.

Pour étudier l'effet du bruit interne dans un oscillateur à quartz, nous avons réalisé plusieurs expériences consistant à introduire une source de bruit blanc de phase dans la boucle d'oscillation. Nous nous sommes alors aperçu que la forme du spectre de phase du signal de sortie est très différente de celle que prévoit le calcul habituel qui consiste à assimiler l'oscillateur à quartz à un simple oscillateur de type Van der Pol :

Le calcul traditionnel prévoit que le spectre de phase du signal de sortie doit présenter une pente en $1/f^2$, or l'expérience montre que ce comportement n'est valable que jusqu'à une fréquence particulière à partir de laquelle le spectre devient blanc.

Monsieur Olivier a suggéré que cette fréquence de coupure correspondait à la différence entre les fréquences de résonance et d'anti-résonance du quartz, cette dernière étant liée elle-même à la présence de

la capacité parallèle du résonateur. L'expérience semblait confirmer cette hypothèse et pour la démontrer de façon théorique, nous avons élaboré un modèle mathématique d'oscillateur tenant compte précisément de cette capacité parallèle. Comme nous le pensions, l'étude de ce modèle conduit bien à une expression analytique du spectre du signal de sortie conforme aux résultats expérimentaux.

De plus, l'analyse théorique du modèle choisi à l'aide des méthodes de calcul de la mécanique non linéaire a permis de montrer que le couplage entre les fluctuations d'amplitude et de fréquence, jusqu'alors considéré comme négligeable, est en réalité relativement important du fait même de la présence de la capacité parallèle.

En ce qui concerne la présentation de ce travail, nous avons jugé utile de le diviser en trois parties :

- La première comporte la description des oscillateurs et des sources de perturbation qui l'affectent, ainsi que la présentation des éléments de calcul des probabilités indispensables à la bonne compréhension du mémoire. Le lecteur y trouvera également un chapitre consacré à la caractérisation des oscillateurs et un autre au résonateur. Cette première partie se termine par la présentation de l'équation régissant l'oscillateur étudié.

- La seconde partie est essentiellement orientée vers les méthodes de résolution de l'équation non linéaire obtenue. Elle donne également tous les résultats théoriques issus de l'analyse du modèle étudié.

- La troisième partie, réduite à un seul chapitre, est consacrée aux différents aspects expérimentaux de ce travail et se termine par la confrontation des résultats théoriques et expérimentaux.

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE 1

LES OSCILLATEURS

Ce chapitre est destiné à situer la place de l'oscillateur à quartz parmi les différents oscillateurs utilisés actuellement dont quelques-uns sont brièvement décrits.

On trouvera également l'élaboration du schéma équivalent et l'établissement de l'équation de fonctionnement ainsi que les définitions qui s'y rapportent et qui seront utilisées au moment de l'étude théorique.

1.1 - LES OSCILLATEURS SINUSOIDAUX

Les oscillateurs sinusoidaux de hautes performances sont basés sur des phénomènes physiques très différents, nous trouvons en particulier :

- . Des générateurs passifs à transition atomique : horloge au rubidium, au césium ...

- . Des générateurs actifs à transition moléculaire ou atomique : MASER à ammoniac, à hydrogène ...

- . Des générateurs utilisant les vibrations mécaniques d'un cristal piézoélectrique : oscillateurs à quartz.

Le développement important de ces derniers est dû en grande partie à leurs très bonnes performances alliées à un encombrement réduit et à une mise en oeuvre relativement aisée.

L'oscillateur à quartz constitue un outil précieux, aussi bien pour l'industriel que pour le physicien.

1.2 - OSCILLATEURS SINUSOIDAUX A TRANSISTORS

1.2.1 - Principe

Le développement important des semi-conducteurs ainsi que la simplicité de leur emploi ont eu pour conséquence leur apparition dans tous les domaines de l'électronique en particulier dans celui des oscillateurs où ils ont avantageusement remplacé les tubes. Le fonctionnement de base des oscillateurs n'a cependant pas changé. Notamment les oscillateurs à réaction sont tous construits sur le principe représenté par la figure 1.1 (1).

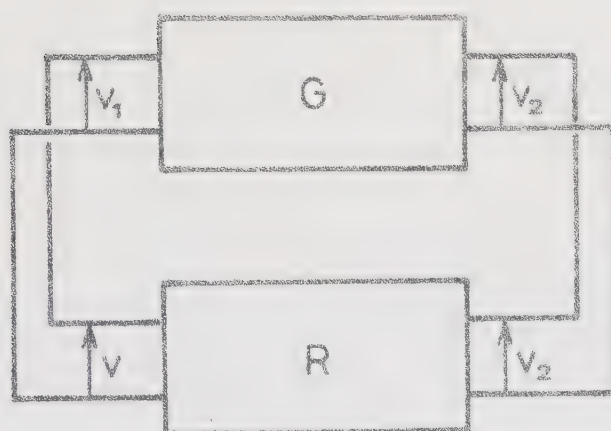


Figure 1.1

Cet oscillateur est constitué d'un amplificateur de gain G et d'une chaîne de contre-réaction de taux R , R et G étant généralement des quantités complexes. Les relations suivantes sont immédiates :

$$v_2 = G v_1$$

$$v = R v_2 = R G v_1$$

1.2.2 - Conditions d'oscillation

Les oscillations sont possibles lorsque les tensions v et v_1 sont égales en module et en phase, c'est-à-dire lorsque le gain en boucle ouverte du système : $v/v_1 = L = RG$ est égal à 1. Cette condition est appelée critère de Barkhausen.

. si $L < 1$ les oscillations s'amortissent.

. si $L > 1$ l'amplitude des oscillations croît indéfiniment, elle est toutefois limitée par les non-linéarités du système. Nous nous apercevons dès maintenant que les non-linéarités jouent un rôle important dans le fonctionnement d'un oscillateur auto-entretenu : ce sont elles qui fixent l'amplitude du signal.

1.3 - OSCILLATEURS CLASSIQUES A TRANSISTORS

1.3.1 - Schéma équivalent

La plupart des oscillateurs à un transistor peuvent se ramener au schéma équivalent représenté par la figure 1.2.

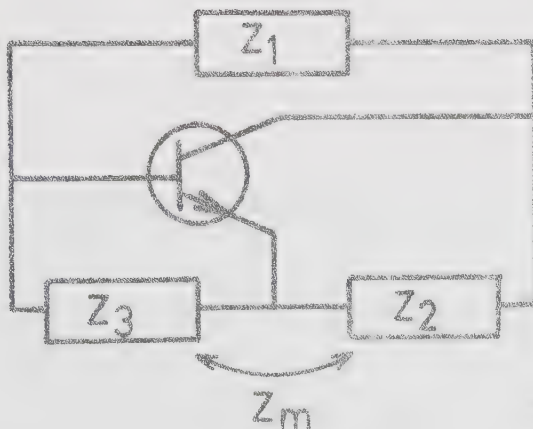


Figure 1.2

Z_m représente une éventuelle impédance mutuelle entre Z_3 et Z_2 . Les éléments de polarisation du transistor n'ont pas été représentés.

Nous pouvons obtenir les conditions d'oscillation d'un tel montage en remplaçant le transistor par son schéma équivalent. Dans cette première approche nous utiliserons seulement une représentation simplifiée du transistor c'est-à-dire que nous négligerons le coefficient de réaction ainsi que la conductance de sortie. (L'annexe 1.1 donne l'expression de L lorsque la conductance de sortie n'est pas négligeable).

Dans ces conditions, le schéma équivalent de l'oscillateur est représenté figure 1.3.

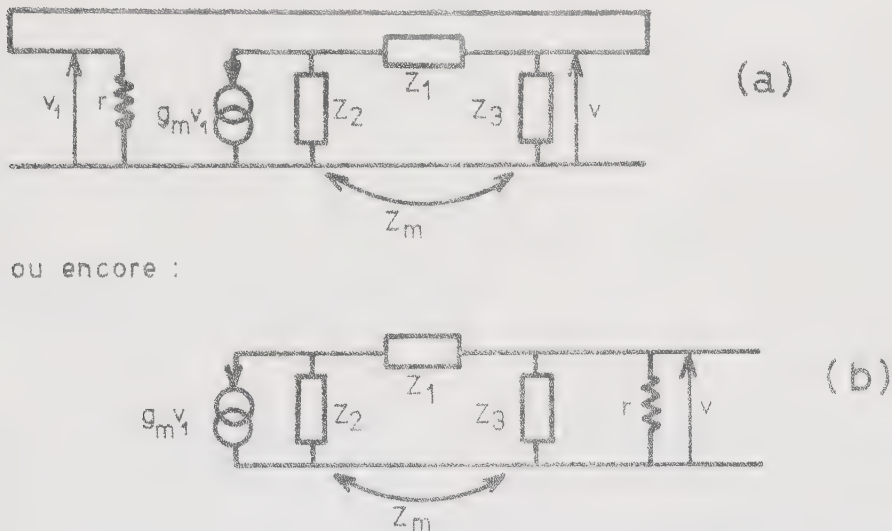


Figure 1.3

1.3.2 - Analyse du circuit

Le gain en boucle ouverte d'un tel oscillateur est donné par la relation :

$$(1.1) \quad L = \frac{v}{v_1} = - \frac{r g_m \{ Z_3 Z_2 - Z_m (Z_1 + Z_m) \}}{(Z_3 + r) (Z_1 + Z_2) + r Z_3 + Z_m (2r - Z_m)}$$

(cf annexe 1.1)

Le critère de Barkhausen : $L = 1$, c'est-à-dire :

$$\arg L = 0 \quad \text{et} \quad |L| = 1$$

permet de définir la fréquence d'oscillation et la condition pour que les oscillations puissent prendre naissance.

Ce modèle ne nous renseigne pas sur l'amplitude des oscillations puisqu'il ne fait pas intervenir les non-linéarités du dispositif actif, il permet seulement d'obtenir de façon simple une première approximation de la fréquence à laquelle oscillera le système et les conditions à remplir pour que le système oscille.

Supposons par exemple que les impédances Z_1, Z_2, Z_3, Z_m soient des réactances pures c'est-à-dire que nous ayons :

$$Z_1 = jX_1, \quad Z_2 = jX_2, \quad Z_3 = jX_3, \quad Z_m = jX_m,$$

la fréquence d'oscillation est donnée par la relation :

$$\begin{aligned} \arg L = 0 & \rightarrow \operatorname{Im.}(L) = 0 \\ (1.2) \quad & \rightarrow X_1 + X_2 + X_3 + 2X_m = 0 \end{aligned}$$

et la condition d'oscillation par :

$$\begin{aligned} |L| & \geq 1 \\ (1.3) \quad & \rightarrow \operatorname{rg}_m \frac{X_2 + X_m}{X_3 + X_m} \geq 1 \end{aligned} \quad \text{cf. Annexe 1.1}$$

Suivant la nature des réactances nous aurons affaire à différents types d'oscillateurs, citons entre autres :

X_2, X_3 négatives (capacités), X_1 positive (self), $X_m = 0$
l'oscillateur est dit de Hartley.

X_2, X_3 positives, X_1 négative, $X_m = 0$ ou $X_m \neq 0$
l'oscillateur est appelé Colpitts.

1.3.3 - Remarques

a) - Il existe un grand nombre d'oscillateurs entrant dans cette catégorie, ils diffèrent essentiellement par la nature des éléments réactifs : les impédances Z_1, Z_2, Z_3 peuvent même dans certains cas être

des combinaisons de selfs, de capacités et de résistances, l'expression du gain en boucle ouverte peut alors devenir rapidement très compliquée. Cette complication s'aggrave encore si l'on veut utiliser un schéma équivalent plus élaboré pour le transistor.

b) - Les relations (1.2) et (1.3) sont valables uniquement en régime harmonique établi et ne sont pas utilisables pour l'étude des perturbations. Par contre l'expression (1.1) peut être utilisée pour établir l'équation différentielle du mouvement, plus complexe mais plus riche en renseignements.

1.3.4 - Oscillateurs à plusieurs étages

Dans leur principe, les oscillateurs à plusieurs étages ne diffèrent guère des précédents, c'est-à-dire qu'ils peuvent être ramenés à un schéma équivalent analogue à celui de la figure 1.3. Par contre, le nombre de paramètres intervenant dans le calcul est considérablement augmenté et impose pratiquement de déterminer globalement les caractéristiques de l'amplificateur par des mesures expérimentales pour poursuivre l'analyse théorique du système.

1.4 - LES OSCILLATEURS A QUARTZ

A l'heure actuelle les oscillateurs à quartz utilisent pratiquement tous des circuits d'entretien à semi-conducteur du type étudié précédemment.

Ces dispositifs utilisent l'effet piézoélectrique d'une lame de quartz convenablement taillée : un champ électrique périodique excite le cristal sur une de ses fréquences propres. Suivant le mode de vibration (flexion, vibration longitudinale, cisaillement d'épaisseur ...) on peut obtenir des fréquences variant de 5 KHz à 100 MHz environ.

Le principal intérêt de ce résonateur réside dans son coefficient de qualité élevé qui est de l'ordre de $2 \cdot 10^6$ pour un quartz à 5 MHz.

Pour les oscillateurs fonctionnant avec un seul transistor, le cristal est placé dans l'une des branches du circuit représenté par la figure 1.2. En prenant un certain nombre de précautions d'ordre technologique, on parvient à réaliser des oscillateurs, stabilisés par quartz, de très bonnes performances. (2)

La figure 1.4 montre quelques schémas de base d'oscillateurs stabilisés par un quartz dans lesquels les éléments de polarisation n'ont pas été représentés.

Dans les circuits représentés figures 1.4 (a) et (b), le quartz oscille au voisinage de la résonance parallèle : il se comporte comme une self de grande valeur tandis que dans les quatre montages suivants il est utilisé à la résonance série.

On trouve également des oscillateurs à quartz à plusieurs étages tels que le montage Pierce à deux étages, l'oscillateur à deux étages émetteurs couplés, cascades ...

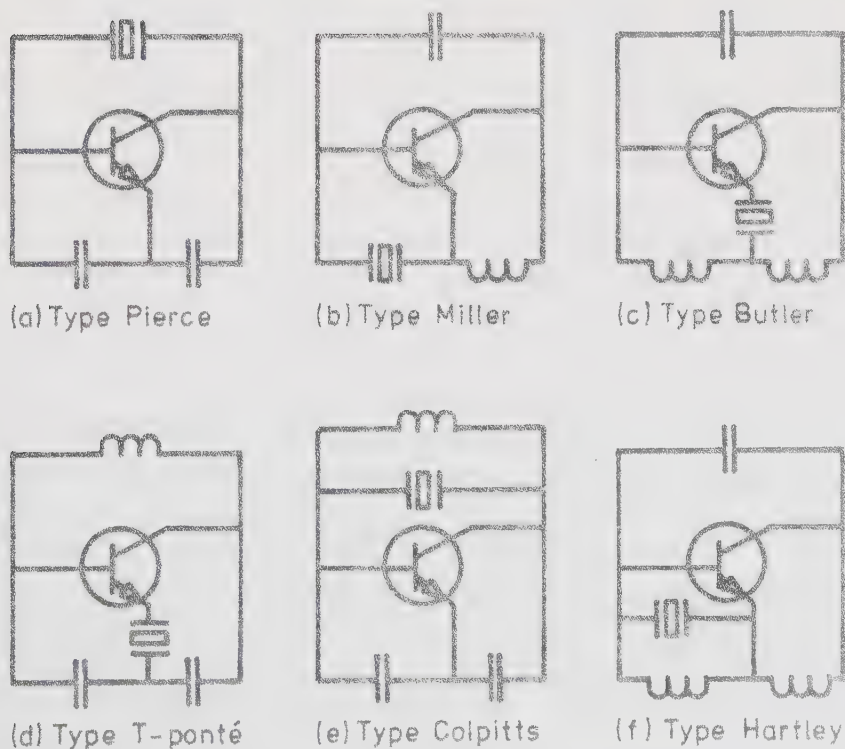


Figure 1.4

1.5 - SCHEMA EQUIVALENT D'UN OSCILLATEUR A QUARTZ

1.5.1 - Conditions de fonctionnement (3)

Nous verrons plus loin que l'étude de l'oscillateur à quartz peut être abordée en remplaçant le résonateur par son schéma électrique équivalent c'est-à-dire par une impédance complexe Z_Q dont les éléments sont déterminés par les propriétés physiques du cristal. En outre, nous étudierons de façon plus approfondie une classe d'oscillateurs dans laquelle la fréquence est uniquement fixée par le quartz ce qui exclut les oscillateurs à circuit accordé ($Z_m = 0$).

La figure 1.5 représente le schéma équivalent d'un tel oscillateur.

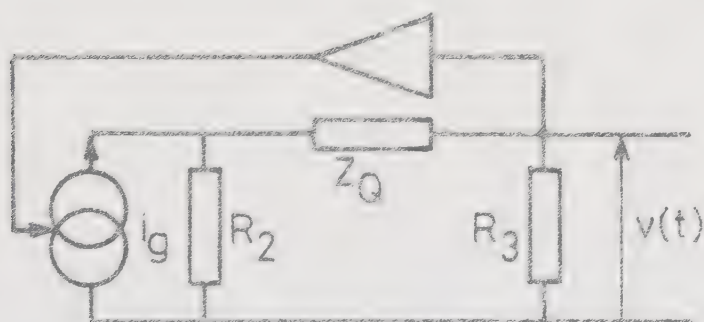


Figure 1.5

Ce schéma est analogue à celui de la figure 1.3, cependant pour que la fréquence soit fixée uniquement par le quartz, il faut que l'amplificateur n'introduise aucun déphasage, il faut donc que les impédances R_2 et R_3 soient réelles et il faut que la tension aux bornes de R_2 soit en phase avec la tension de sortie $v(t)$. Cette condition découle du critère de Barkhausen et exclut que le système fonctionne avec un seul transistor.

Si nous comparons les figures 1.5 et 1.3, nous nous apercevons que R_3 représente l'impédance d'entrée de l'amplificateur (analogue à r)

et R_2 représente son impédance de sortie (infinie dans le cas de la figure 1.3). Le générateur équivalent $i_g(t)$ débite dans le sens contraire de $g_m v_1$ afin de réaliser la condition de phase nulle entre les tensions d'entrée et de sortie.

L'action de l'amplificateur est donc parfaitement déterminée par la connaissance de R_2 , R_3 et $i_g(t)$, nous l'avons représenté sur la figure 1.5 uniquement pour la compréhension du fonctionnement.

Si nous supposons que $i_g(t)$ est de la forme :

$i_g(t) = g_m v(t)$ où g_m désigne ici la transconductance de l'amplificateur, la relation (1.1) devient :

$$(1.4) \quad L = \frac{g_m R_2 R_3}{R_2 + R_3 + Z_Q}$$

L'impédance Z_Q peut se mettre sous la forme :

$$Z_Q = R_Q + jX_Q \quad \text{d'où :}$$

$$(1.5) \quad L = \frac{g_m R_2 R_3}{R_2 + R_3 + R_Q + jX_Q} = 1$$

La condition $\arg(L) = 0$ implique que $X_Q = 0$ et fixe la fréquence d'oscillation du système en régime établi : cette fréquence ne dépend donc que de la réactance du quartz.

1.5.2 - Oscillateurs durs et doux

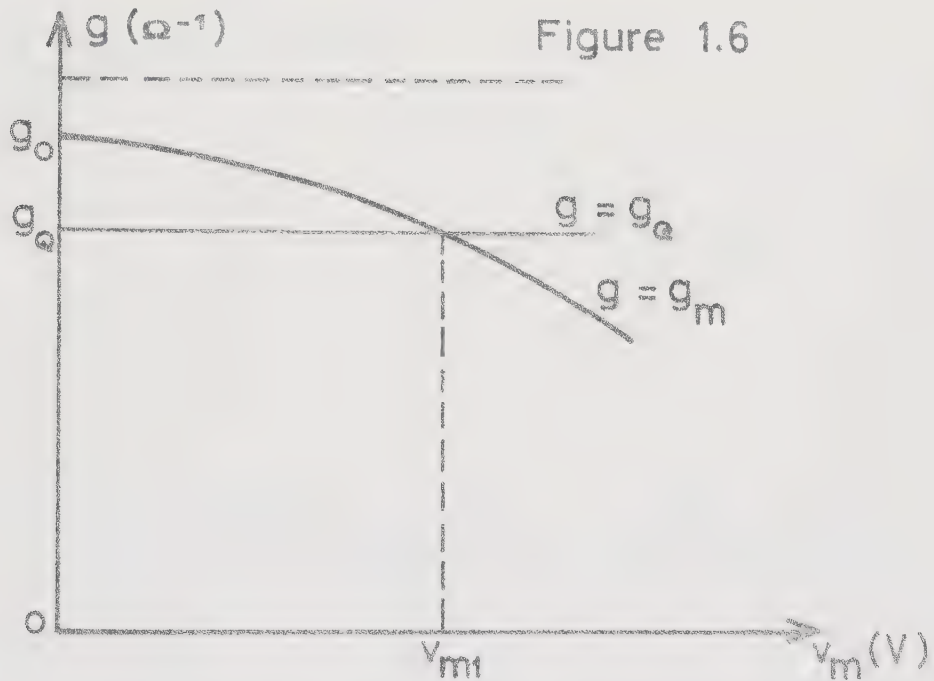
La condition $|L| \geq 1$ impose donc que $g_m \geq (R_2 + R_3 + R_Q)/R_2 R_3$ et exprime que les oscillations peuvent prendre naissance mais ne renseigne pas sur leur amplitude en régime établi. Pour obtenir l'amplitude des oscillations il faut faire intervenir les non-linéarités de l'amplificateur : la transconductance g_m de l'amplificateur doit être une fonction décroissante de la tension d'entrée $v(t)$. Si v_m désigne la tension efficace du signal $v(t)$ et g_Q la quantité :

$$g_Q = \frac{R_2 + R_3 + R_Q}{R_2 R_3} \quad \text{nous pourrions distinguer deux types}$$

d'oscillateurs suivant l'allure de la fonction $g = g_m(v_m)$. (4,5).

- Oscillateurs doux

La courbe $g_m(v_m)$ représentée sur la figure 1.6 est monotone décroissante.



L'amplitude des oscillations est obtenue lorsque la droite $g = g_Q$ coupe la courbe $g = g_m(v_m)$. Nous voyons que si $g_Q > g_0$ les oscillations ne peuvent pas apparaître et que si $g_Q < g_0$ les oscillations croissent de 0 à v_{m1} . Si une perturbation diminue l'amplitude du signal, g_m devient supérieur à g_Q donc $L > 1$ l'amplitude tend à augmenter vers v_{m1} ; si la perturbation augmente l'amplitude, g_m devient inférieur à g_Q donc $L < 1$ et l'amplitude tend à diminuer vers v_{m1} : le point de fonctionnement est stable.

- Oscillateurs durs :

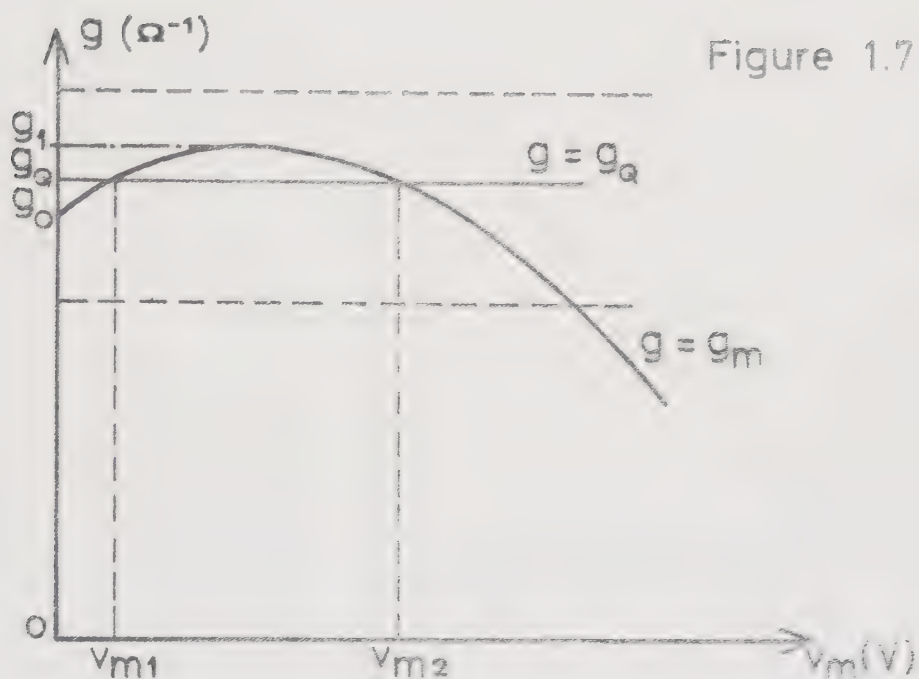


Figure 1.7

La figure 1.7 montre que dans ce cas la courbe $g = g_m(v_m)$ présente un maximum et que dans certains cas il peut y avoir deux amplitudes d'oscillation possibles. L'amplitude v_{m1} correspond à un point de fonctionnement instable : si une perturbation diminue l'amplitude, celle-ci continue à décroître vers zéro, tandis que si cette perturbation augmente l'amplitude, celle-ci continue à croître jusqu'à v_{m2} : point de fonctionnement stable, l'oscillateur ne peut atteindre ce point que si le système est excité avec une amplitude supérieure à v_{m1} . Nous remarquons que si $g_Q > g_1$ il ne peut y avoir oscillation et que si $g_Q < g_0$ nous n'avons qu'un point de fonctionnement stable comme dans le cas des oscillateurs doux.

1.5.3 - Caractéristique de l'oscillateur

De façon générale, la caractéristique de l'amplificateur peut s'exprimer par une relation non-linéaire entre le courant de sortie $i_g(t)$ et la tension d'entrée $v(t)$:

$$i_g = f(v)$$

la transconductance ou pente différentielle est définie par la relation $g = di_g/dv$ elle dépend de l'élongation du signal v et elle est difficile à obtenir expérimentalement c'est pourquoi on définit une autre transconductance g_m , appelée transconductance effective ou pente moyenne, qui ne dépend que de l'amplitude du signal et, naturellement, de l'amplificateur utilisé. La détermination théorique de la caractéristique à partir des paramètres de l'amplificateur est souvent très compliquée, de plus, la forme des fonctions mathématiques intervenant dans l'expression de i_g rend son exploitation extrêmement difficile. C'est pourquoi il est beaucoup plus simple de déterminer expérimentalement la transconductance effective de l'amplificateur et d'en déduire les coefficients de la caractéristique mise sous forme d'une fonction analytique ce qui permet de poursuivre l'étude théorique.

Rappelons brièvement les relations entre les coefficients de la transconductance effective et ceux de la caractéristique :

Nous cherchons une caractéristique sous forme d'un polynôme tel que :

$$(1.6) \quad i_g = i_{g0} + g_0 v + \alpha v^2 + \beta v^3 + \gamma v^4 + \delta v^5$$

Le signal $v(t)$ en régime permanent peut s'écrire :

$$v = v_m \cos \omega t, \quad i_g \text{ prend alors la forme :}$$

$$(1.7) \quad i_g = i_{g0} + g_0 v_m \cos \omega t + \frac{\alpha}{2} v_m^2 (1 + \cos 2\omega t) + \frac{\beta v_m^3}{4} (3 \cos \omega t + \cos 3\omega t) + \frac{\gamma v_m^4}{8} (3 + 4 \cos 2\omega t + \cos 4\omega t) + \frac{\delta v_m^5}{16} (10 \cos \omega t + 5 \cos 3\omega t + \cos 5\omega t)$$

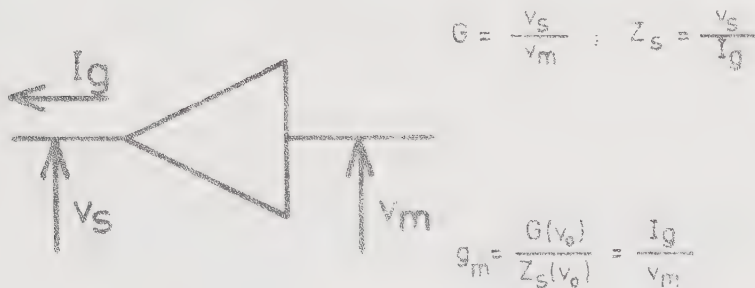
Par définition, la transconductance effective est le rapport entre les amplitudes du courant et de la tension correspondant au premier harmonique soit :

$$(1.8) \quad g_m = g_0 + \frac{3\beta v_m^2}{4} + \frac{5\delta v_m^4}{8} = \frac{i_g}{v_m}$$

Nous voyons ici que seuls les termes pairs de la caractéristique jouent un rôle, elle pourrait donc être utilisée sous la forme plus simple :

$$(1.9) \quad i_g = g_o v + \beta v^3 + \delta v^5$$

Expérimentalement, la transconductance effective est obtenue en déterminant le gain et l'impédance de sortie de l'amplificateur en fonction du niveau du signal d'entrée :



Connaissant la transconductance expérimentale, il n'est pas difficile d'en déduire les coefficients du polynôme qui coïncide le mieux avec la courbe expérimentale d'abord et les coefficients g_o , β et δ de la caractéristique ensuite.

Remarque :

Il est évident qu'une étude complète du bruit interne nécessitera une analyse plus détaillée de l'amplificateur afin de déterminer la responsabilité de tous les paramètres de la boucle d'oscillation dans les perturbations qui affectent la fréquence ou l'amplitude du signal.

Dans ce travail nous n'avons pas cherché les causes du bruit qui peuvent être, comme nous le verrons, d'origines très diverses, mais ses effets et son comportement dans la boucle d'oscillation. C'est pourquoi nous schématiserons l'amplificateur réel par un amplificateur parfait (c'est-à-dire dont les coefficients de la caractéristique sont parfaitement définis et invariables) suivi d'une source de bruit.

1.6 - EQUATION DE FONCTIONNEMENT

Nous avons établi précédemment les conditions d'oscillation du système bouclé faisant intervenir la transconductance de l'amplificateur (relations (1.2), (1.3) et (1.5)) et nous avons précisé que ces conditions n'étaient valables qu'en régime permanent. La seule méthode permettant d'analyser le comportement d'un oscillateur perturbé consiste à établir l'équation différentielle dont la variable est la grandeur de sortie de l'oscillateur, ici : la tension $v(t)$.

Pour établir cette équation différentielle, reprenons le schéma 1.5 dans lequel nous remplacerons le générateur de Norton par le générateur de Thévenin équivalent (figure 1.8)

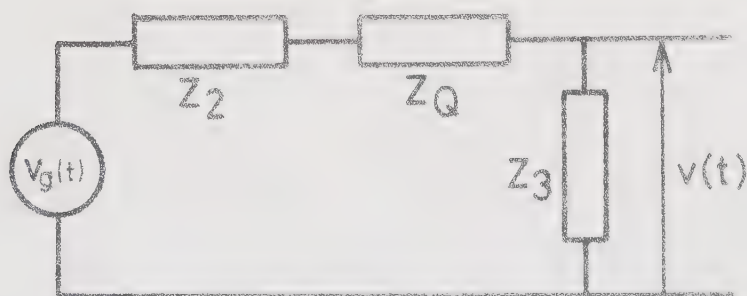


Figure 1.8

Nous considérerons maintenant que les impédances d'entrée et de sortie de l'amplificateur peuvent être complexes.

$$v_g(t) = Z_2 i_g(t)$$

L'équation de fonctionnement s'obtient de façon élémentaire en écrivant que :

$$(1.10) \quad v(t) = \frac{Z_3 v_g(t)}{Z_2 + Z_3 + Z_Q} = \frac{Z_2 Z_3 i_g(t)}{Z_2 + Z_3 + Z_Q}$$

en remplaçant $i_g(t)$ par la caractéristique $i_g = f(v)$ et en utilisant l'opérateur de Laplace pour exprimer les impédances, nous obtiendrons l'é-

quation différentielle complète régissant le fonctionnement de l'oscillateur. Nous reviendrons sur ce sujet au cours du quatrième chapitre.

Le critère de Barkhausen permet également d'obtenir l'équation différentielle : si nous nous reportons au paragraphe 1.3.2, nous avons :

$$L = \frac{v}{v_1} = 1 \quad \text{donc} \quad v = v_1 \quad \text{et la relation (1.4) devient ici :}$$

$$v = \frac{g_m v Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3 + Z_Q}$$

comme $i_g(t) = g_m v(t)$, nous retrouvons l'expression (1.10)

CHAPITRE 2

LE BRUIT DANS LES OSCILLATEURS

L'objet de ce second chapitre est de rappeler un certain nombre de définitions et de propriétés des processus stochastiques indispensables pour l'étude du bruit et de décrire l'origine et la situation des diverses sources de perturbation dans l'oscillateur.

2.1 - RAPPELS SUR LES PROCESSUS STOCHASTIQUES

Un bruit ou plus généralement une fonction aléatoire du temps (processus stochastique) $X(t)$ ne peut pas être explicitée de façon simple, elle peut seulement être définie à partir des fonctions et des paramètres statistiques :

2.1.1 - Fonctions statistiques : Fonction de répartition et fonction densité de probabilité :

A un instant donné t , le processus stochastique peut prendre une valeur quelconque, cette valeur $X(t)$ est alors une variable aléatoire et peut être définie par sa fonction de distribution du premier ordre (6, 7) :

$$(2.1) \quad F(x,t) = P \{ X(t) \leq x \}$$

$P \{ X(t) \leq x \}$ représente la probabilité pour que $X(t)$ soit inférieure à une valeur déterminée x . $F(x,t)$ est alors une fonction déterministe et dépend en général du temps.

La fonction densité de probabilité du processus $X(t)$ est définie par :

$$(2.2) \quad f(x,t) = \frac{\partial F(x,t)}{\partial x}$$

Cette fonction représente la densité de probabilité pour que, t étant fixé, la variable aléatoire $X(t)$ soit comprise entre deux valeurs déterminées infiniment voisines x et $x + dx$:

$$(2.3) \quad f(x,t) dx = P \{ x < X(t) \leq x + dx \}$$

Si nous considérons à présent le processus stochastique $X(t)$ à deux instants différents t_1 et t_2 , les quantités $X(t_1)$ et $X(t_2)$ sont deux variables aléatoires dont la fonction de distribution conjointe ou fonction de distribution d'ordre 2 est définie par :

$$(2.4) \quad F(x_1, x_2 ; t_1, t_2) = P \{ X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2 \}$$

c'est la probabilité pour que $X(t_1)$ et $X(t_2)$ soient respectivement inférieures à deux valeurs déterminées x_1 et x_2 . Cette fonction dépend en général des instants choisis t_1 et t_2 .

La densité de probabilité du second ordre du processus $X(t)$ est maintenant définie par :

$$f(x_1, x_2 ; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2 ; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{ou encore}$$

$$(2.5) \quad f(x_1, x_2 ; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = P \{ x_1 < X(t_1) \leq x_1 + dx_1, x_2 < X(t_2) \leq x_2 + dx_2 \}$$

Ces définitions s'étendent sans difficulté aux fonctions de distributions et de densité du $n^{\text{ième}}$ ordre : $F(x_1, x_2, \dots, x_n ; t_1, t_2, \dots, t_n)$

Remarque :

Un processus réel stochastique est statistiquement déterminé par la connaissance de ses fonctions de distribution d'ordre n . La statistique est d'autant plus précise que n est grand. (La fonction de distribution d'ordre k détermine toutes les fonctions de distribution d'ordre $n \leq k$).

2.1.2 - Paramètres statistiques : moments :

Les fonctions densité de probabilité permettent d'introduire un certain nombre de paramètres statistiques importants dans l'étude des processus stochastiques, ce sont les moments :

a) - Moment d'ordre un de $X(t)$ ou moyenne statistique :

C'est l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X(t)$ définie par :

$$(2.6) \quad \eta(t) = E \{ X(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,t) dx$$

$\eta(t)$ dépend en général du temps.

b) - Moment d'ordre deux ou fonction d'autocorrélation :

S'exprime par le moment conjoint des variables aléatoires $X(t_1)$ et $X(t_2)$ *

$$(2.7) \quad R(t_1, t_2) = E \{ X(t_1) X(t_2) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2 ; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

c'est une fonction de t_1 et t_2 .

c) - Fonction d'autocovariance :

On appelle ainsi la fonction d'autocorrélation des variables aléatoires centrées : $X(t_1) - \eta(t_1)$ et $X(t_2) - \eta(t_2)$:

$$(2.8) \quad C(t_1, t_2) = E \{ (X(t_1) - \eta(t_1)) (X(t_2) - \eta(t_2)) \}$$

la relation suivante est immédiate :

$$(2.9) \quad C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \eta(t_1) \cdot \eta(t_2)$$

d) - Variance et écart-type :

La variance de la variable aléatoire $X(t)$ est définie par :

$$(2.10) \quad \sigma^2(t) = C(t, t) = E \{ (X(t) - \eta(t))^2 \} = R(t, t) - \eta^2(t)$$

$\sigma(t)$ est appelé l'écart-type de $X(t)$.

* Pour ne pas alourdir l'écriture, les intégrales multiples sont notées par un seul signe somme.

2.1.3 - Classifications des processus

a) - Processus gaussien ou normal :

Un processus stochastique $X(t)$ est gaussien si les variables aléatoires $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ sont conjointement gaussiennes quel que soit n . Les fonctions statistiques d'un processus normal sont complètement déterminées par la connaissance de la moyenne $\eta(t)$ et de l'autocorrélation $R(t_1, t_2)$ (ou de l'autocovariance $C(t_1, t_2)$).

La densité de probabilité du premier ordre d'un tel processus s'écrit :

$$(2.11) \quad f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} e^{-\frac{(x - \eta(t))^2}{2\sigma^2(t)}}$$

b) - Processus stationnaires :

On distingue plusieurs types de stationnarités :

- Un processus est stationnaire au sens strict si ses fonctions statistiques de tous ordres ne sont pas modifiées par un changement d'origine des temps, en d'autres termes : $X(t)$ et $X(t+\theta)$ ont les mêmes fonctions statistiques quel que soit θ :

$$(2.12) \quad \forall n, \forall \theta : f(x_1, x_2, \dots, x_n ; t_1, t_2, \dots, t_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n ; t_1 + \theta, t_2 + \theta, \dots, t_n + \theta).$$

En particulier nous avons :

$$(2.13) \quad \forall \theta : f(x, t) = f(x, t + \theta) = f(x)$$

La fonction densité de probabilité du premier ordre ne dépend pas de t , ce qui entraîne d'après la relation (2.6) : $\eta = c^{t\theta}$.

De même :

$$(2.14) \quad \forall \theta : f(x_1, x_2 ; t_1, t_2) = f(x_1, x_2 ; t_1 + \theta, t_2 + \theta) = f(x_1, x_2 ; \tau)$$

avec $\tau = t_2 - t_1$, la fonction densité du second ordre ne dépend que de la différence $t_2 - t_1 = \tau$. D'après (2.7), nous pouvons dire :

$$(2.15) \quad E \{ X(t) \cdot X(t + \tau) \} = R(\tau) = R(-\tau)$$

- Un processus est stationnaire d'ordre k lorsque (2.12) est vérifiée seulement pour $n \leq k$ (si (2.12) est vérifiée pour $n = k$, elle l'est pour tout $n \leq k$ d'après la remarque du § 2.1.1).

- Un processus est stationnaire au sens large ou faiblement stationnaire si sa valeur moyenne est constante et si sa fonction d'autocorrélation ne dépend que de la différence $t_2 - t_1 = \tau$:

$$(2.16) \quad E \{X(t)\} = \eta = c^{te} ; \quad E \{X(t) \cdot X(t+\tau)\} = R(\tau) *$$

- Un processus $X(t)$ normal et stationnaire au sens large est aussi stationnaire au sens strict d'après ce que nous avons vu au § 2.1.3.a.

c) - Processus ergodiques :

Un processus $X(t)$ est ergodique si ses fonctions et paramètres statistiques peuvent être déterminés à partir d'une seule observation de la "fonction" $X(t)$. En d'autres termes : $X(t)$ est un processus ergodique lorsque les espérances mathématiques et les moyennes temporelles qui le concernent sont égales. Nous avons en particulier pour un processus stationnaire :

- Pour la moyenne statistique :

$$(2.17) \quad \eta = E \{X(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt = \overline{X(t)}$$

- Pour la fonction d'autocorrélation :

$$(2.18) \quad R(\tau) = E \{X(t) X(t+\tau)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) X(t+\tau) dt = \overline{X(t) X(t+\tau)}$$

d) - Bruit blanc :

On appelle ainsi un processus stochastique $N(t)$, stationnaire, généralement ergodique tel que :

$$(2.19) \quad \eta_N = 0 \quad \text{et} \quad R_N(\tau) = A \delta(\tau)$$

A est une constante et $\delta(\tau)$ est la mesure de Dirac (on dit aussi que $N(t)$ est un processus δ -corrélé).

* Cela n'est pas équivalent à un processus stationnaire d'ordre 2, la condition est moins restrictive.

e) - Processus de Poisson ou processus purement aléatoire :

Lorsque des évènements identiques se reproduisent de façon aléatoire au cours du temps à des instants T_i , on montre (8) que la probabilité pour que k évènements aient lieu pendant un temps donné t est :

$$(2.20) \quad P \{k, t\} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$$

λ est le nombre moyen d'évènements par unité de temps. Cette distribution discrète permet de définir le processus des impulsions de Poisson par la variable stochastique :

$$(2.21) \quad Z(t) = \sum_i \delta(t - T_i) \quad (\text{figure 2.1})$$



où les instants T_i sont distribués suivant la loi (2.20). Un tel processus est stationnaire et a pour statistiques (6) :

$$(2.22) \quad \eta_Z = \lambda \quad \text{et} \quad R_Z(\tau) = \lambda^2 + \lambda \delta(\tau)$$

2.1.4 - Densité spectrale de puissance (d.s.p.) d'un processus aléatoire stationnaire réel

Il existe plusieurs façons de définir la d.s.p. d'un processus stationnaire *, nous nous bornerons à la définition axiomatique suivante : la d.s.p. du processus stationnaire $X(t)$ est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation :

$$(2.23) \quad S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau$$

* Il suffit de considérer la stationnarité au sens large puisque nous ne nous intéresserons qu'aux deux premiers moments.

On exprime quelquefois le spectre $S(f)$ relié à $S(\omega)$ par la relation : $S(f) = 2\pi S(\omega)$ (cf. annexe 2.1).

Par inversion de (2.23), nous avons :

$$(2.24) \quad R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cos\omega\tau d\omega$$

Les relations (2.23) et (2.24) peuvent être démontrées par la méthode de l'analyse harmonique des processus aléatoires, elles constituent alors le théorème de Wiener-Khintchine (9).

Propriétés :

- $R(\tau)$ est une fonction réelle, paire, maximale à l'origine, nous avons par conséquent :

$$(2.25) \quad S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos\omega\tau d\tau \quad \text{et :}$$

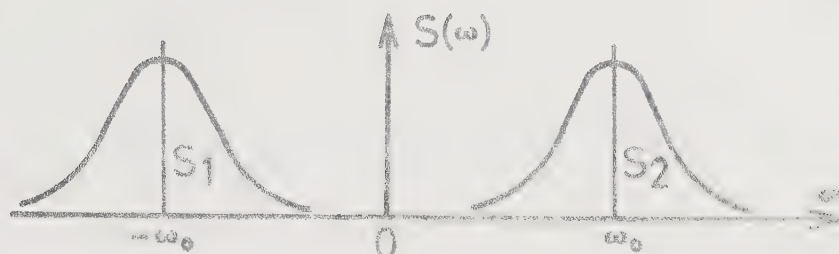
$$(2.26) \quad |R(\tau)| \leq R(0) \quad \text{avec : } R(0) = E \{X^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) d\omega \geq 0$$

Cette relation montre que l'aire sous le spectre est proportionnelle à la "puissance moyenne" du processus $X(t)$.

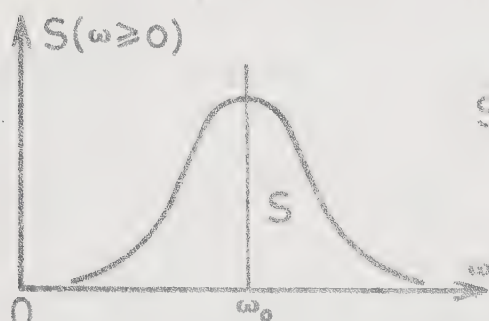
- $S(\omega)$ est une fonction paire, toujours positive, définie pour toutes valeurs de ω : négatives et positives. Physiquement, les fréquences négatives n'ont pas de signification, c'est pourquoi on ne considère généralement que la partie du spectre à fréquences positives (spectre physique noté $S(\omega \geq 0)$). Puisque les spectres physiques et mathématiques rendent compte du même phénomène physique, il faut que la puissance moyenne soit la même dans les deux cas, les deux spectres doivent donc couvrir la même aire. (cf. figure 2.2).

La fonction $S(\omega)$ étant paire, nous avons : $S(\omega \geq 0) = 2S(\omega)$, par conséquent la relation (2.25) devient :

$$(2.27) \quad S(\omega \geq 0) = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos\omega\tau d\tau$$



(a) Spectre mathématique $\omega \geq 0$



$$S = S_1 + S_2$$

(b) Spectre physique $\omega \geq 0$

Figure 2.2

Remarques :

- Compte tenu de (2.19) et (2.23), la d.s.p. d'un bruit blanc s'écrit :

$$S_N(\omega) = A = c^{te} \quad \text{ou} \quad S_N(\omega \geq 0) = 2A$$

- Pour un processus d'impulsions de Poisson, (2.22) et (2.23) permettent d'écrire :

$$S_Z(\omega) = 2\pi\lambda^2\delta(\omega) + \lambda$$

2.1.5 - Systèmes linéaires

Un système linéaire peut être caractérisé par son gain complexe (10) ou fonction de transfert $H(j\omega)$. Cette fonction peut être d'ailleurs définie comme la transformée de Fourier de la réponse $h(t)$ du système à une impulsion unité :

$$(2.28) \quad H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

Si un processus stationnaire $X(t)$ est appliqué à l'entrée d'un système linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$, nous obtenons les relations suivantes entre les statistiques des signaux d'entrée $X(t)$ et de sortie $Y(t)$:

- Si η_X et η_Y désignent les moyennes statistiques de $X(t)$ et $Y(t)$

$$(2.29) \quad \eta_Y = H(0) \eta_X \quad \text{avec} \quad H(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$$

- Entre les fonctions d'autocorrélation $R_X(\tau)$ et $R_Y(\tau)$ de $X(t)$ et $Y(t)$ on montre qu'il existe la relation suivante :

$$(2.30) \quad R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau) * h(\tau)$$

où le symbole $*$ désigne l'opération de convolution.

- De la relation (2.30) nous pouvons déduire l'importante relation entre les d.s.p. $S_X(\omega)$ et $S_Y(\omega)$ de $X(t)$ et $Y(t)$ (cf. définition 2.23)

$$(2.31) \quad S_Y(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_X(\omega)$$

2.2 - ORIGINE DU BRUIT

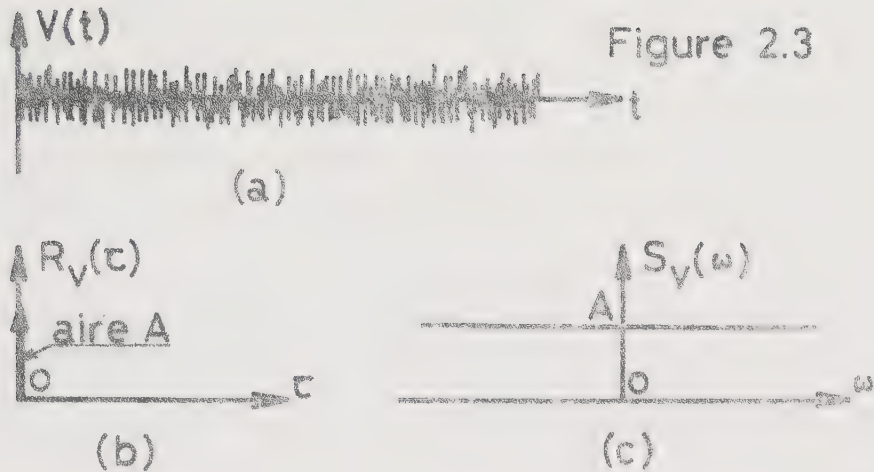
2.2.1 - Bruit thermique

a) d.s.p. du bruit thermique :

Dans tout conducteur, les porteurs de charges sont animés d'un mouvement désordonné dû à l'agitation thermique. Aux bornes de tout élément résistif il apparaît par conséquent une force électromotrice $V(t)$ aléatoire appelée bruit thermique ou effet Johnson. Toute résistance réelle peut, par conséquent être considérée comme une résistance sans bruit en série avec un générateur de f.e.m. $V(t)$. $V(t)$ est un bruit blanc ergodique gaussien, c'est-à-dire que :

$$E \{V(t)\} = \overline{V(t)} = 0, \quad R_V(\tau) = A \delta(\tau) \quad \text{et} \quad S_V(\omega) = A$$

(figure 2.3).



Le théorème de Nyquist permet de déterminer la valeur de A dans le cas du bruit thermique d'une résistance R (annexe 2.2). Nous avons dans ce cas :

$$(2.32) \quad S_V(\omega) = 2RkT \quad \text{ou} \quad S_V(\omega \geq 0) = 4RkT \quad (\text{en } V^2/\text{Hz})$$

k : constante de Boltzmann : $k = 1,37 \cdot 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$

T : température absolue de la résistance en $^\circ\text{K}$

La relation (2.26) permet de calculer la puissance moyenne délivrée par la résistance R (annexe 2.2) soit :

$$(2.33) \quad \overline{V^2(t)} = 4 R k T \Delta f \quad \text{où } \Delta f \text{ désigne la bande passante de l'appareil de mesure.}$$

b) - Généralisation du Théorème de Nyquist :

Soit $V(t)$ la tension aléatoire recueillie aux bornes d'un dipôle passif contenant des résistances, inductances, capacités et même des dispositifs électromécaniques ou autres pouvant se ramener à un schéma électrique équivalent, tous ces éléments étant à la même température T . Si $Z(j\omega)$ est l'impédance du dipôle, le théorème de Nyquist généralisé montre que le spectre de $V(t)$ s'écrit (11) :

$$(2.34) \quad S_V(\omega) = 2kT \operatorname{Re}.(Z(j\omega)) \rightarrow S_V(\omega \geq 0) = 4kT \operatorname{Re}.(Z(j\omega))$$

où $\operatorname{Re}.(Z(j\omega))$ désigne la partie réelle de l'impédance complexe $Z(j\omega)$.

2.2.2 - Bruit de grenaille

Dans un tube à vide, les électrons sont émis par la cathode de façon aléatoire, le courant circulant dans le circuit subit par conséquent des fluctuations. De même, au niveau de toute jonction p.n. (diode, transistor ...) le passage de la barrière de potentiel par les porteurs de charge s'effectue de manière aléatoire et crée le bruit de grenaille ou effet Shottky.

Le phénomène d'émission des électrons ou de franchissement d'une barrière de potentiel étant purement aléatoire, la distribution des instants T_i où se produit l'évènement constitue un processus d'impulsions de Poisson qui peut être défini par la relation (2.21) :

$$Z(t) = \sum_i \delta(t - T_i).$$

Ce processus est caractérisé par une densité uniforme de distribution λ qui est le nombre moyen d'électrons émis ou de franchissement de la barrière par unité de temps.

Si l'on néglige le temps de transit des électrons dans le tube ou des porteurs dans la zone de charge d'espace, à chaque instant T_i il se produit au niveau de l'anode une impulsion de courant. La valeur moyenne de ces impulsions constitue le courant d'anode dont la valeur est (cf. annexe 2.3) :

$$I_d = \lambda q \quad \text{où} \quad q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C est la charge de l'électron.}$$

Les fluctuations du courant autour de cette valeur moyenne constitue un processus de bruit blanc dont la densité spectrale de puissance est donnée par la formule de Shottky (annexe 2.3) :

$$(2.35) \quad E \{J(t)\} = 0, \quad R_J(\tau) = \lambda q^2 \delta(\tau) = q I_d \delta(\tau)$$

soit :

$$S_J(\omega) = q I_d \quad \text{ou} \quad S_J(\omega \geq 0) = 2 q I_d \quad (\text{en } A^2/\text{Hz}).$$

La puissance moyenne des fluctuations de courant dans une bande de fréquence Δf vaut par conséquent :

$$\overline{J^2(t)} = 2 q I_d \Delta f \quad (\text{cf. annexe 2.3})$$

Un tube à vide réel ou une jonction réelle peuvent être alors considérés comme des dispositifs sans bruit en parallèle avec un générateur de courant $J(t)$.

2.2.3 - Bruit de scintillation

Présent dans la totalité des dispositifs électroniques et également dans la plupart des autres domaines de la physique (optique, acoustique et même en météorologie, etc...) le bruit de scintillation, appelé aussi bruit flicker, bruit en $1/f$ ou bruit excessif est encore assez mal connu.

En ce qui concerne les dispositifs électroniques (résistances, tubes, diodes, transistors ...) parcourus par un courant moyen I_d , l'expérience montre que le carré moyen des fluctuations de courant autour de I_d obéit à une loi du type :

$$\overline{I^2} = K \frac{I_d^\alpha}{f^\beta} df \quad \text{avec} \quad \alpha \approx 2 \quad \text{et} \quad \beta \approx 1$$

On attribue généralement ce bruit à des effets de surface. Les défauts et impuretés de la surface de la cathode d'un tube ou de la jonction dans un dispositif à semi-conducteur (27) créent des "pièges" qui retardent, avec une plus ou moins longue constante de temps τ , les porteurs de charge. Le nombre moyen de porteurs quittant la cathode ou franchissant la barrière de potentiel n'est plus dans ce cas une constante mais une variable aléatoire. Les fluctuations de courant sont alors liées à la densité de probabilité $g(\tau)$ des temps de vie τ .

Différents modèles ont été proposés pour cette fonction $g(\tau)$, faisant généralement appel aux phénomènes de diffusion à grandes constantes de temps.

A notre connaissance, aucun de ces modèles ne donne exactement le spectre obtenu expérimentalement (12).

2.2.4 - Autres sources de bruits

En plus des bruits exposés précédemment, il existe d'autres types de fluctuations. Certaines d'entre elles, bien qu'ayant le même effet qu'un processus aléatoire, sont cependant "contrôlables" sinon contrôlées. ce sont les conséquences des fluctuations de température, des champs électriques ou magnétiques, elles peuvent être dues également aux vibrations ou aux chocs mécaniques, etc... créés par l'environnement sur le dispositif dont on mesure le bruit. Bien que théoriquement possible, l'élimination de ces perturbations, appelées quelquefois bruits macroscopiques, est un problème délicat.

Il existe également des bruits spécifiques à certains dispositifs. Par exemple le bruit de génération-recombinaison dans les semi-conducteurs dont l'effet se traduit par des fluctuations de la résistivité du matériau. Le "burst noise" ou bruit en créneaux dans certains transistors est caractérisé par des impulsions de courant de même amplitude et de durée variable...

Lorsqu'on étudie les perturbations d'une grandeur physique, par exemple la fréquence du signal d'un oscillateur, il est assez difficile d'attribuer la responsabilité des fluctuations observées à une source de bruit plutôt qu'à une autre.

2.3 - BRUIT D'UN OSCILLATEUR

2.3.1 - Oscillateur réel

Nous avons considéré au paragraphe 1.5, le schéma équivalent d'un oscillateur à quartz sous la forme d'un amplificateur bouclé par un élément résonnant constitué par le quartz (figure 2.4). Pour diminuer le plus possible l'influence des non-linéarités du résonateur, il est indispensable que la puissance d'excitation soit petite (13). Le signal issu d'un tel oscillateur serait donc trop faible pour être utilisé et de plus il serait perturbé par la charge qui lui est appliquée, pour ces raisons, l'oscillateur réel est constitué d'une boucle d'oscillation et d'un amplificateur de sortie destiné à amplifier le signal et surtout à diminuer l'influence de la charge sur la boucle d'où son nom d'ampli.-séparateur (figure 2.4).



Figure 2.4

2.3.2 - Classification des bruits dans les oscillateurs

Traditionnellement, les sources de bruit dans les oscillateurs sont classées en trois catégories (14,15) :

- Le bruit additif externe, prenant naissance dans l'amplificateur de sortie.
- Le bruit additif interne dû aux éléments de la boucle d'oscillation.
- Le bruit basse fréquence, quelquefois appelé bruit multiplicatif, qui perturbe le signal par l'intermédiaire de phénomènes non-linéaires ou paramétriques.

En ce qui concerne le modèle d'oscillateur que nous avons choisi, nous allons préciser un peu ces notions en différenciant les sources de bruit suivant leur origine et/ou leur effet (figure 2.5).

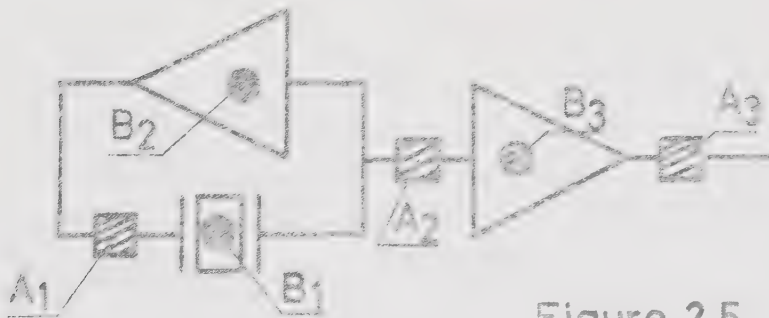


Figure 2.5

a) - Le bruit additif

Il est dû aux sources de bruit thermique ou de grenaille présentes aussi bien dans la boucle d'oscillation qu'à l'extérieur. La tension de bruit provoquée par ces sources s'ajoute au signal et perturbe son amplitude et sa phase. Il est clair que pour le bruit additif, seules les composantes spectrales voisines de la fréquence de résonance auront une influence sur le spectre du signal de sortie.

Les sources de bruits additifs peuvent être en outre classées en trois catégories suivant leur localisation dans l'oscillateur (3) :

. Bruit interne d'"entrée" : ainsi appelé parce qu'il est situé en amont du quartz par rapport à la sortie (source A_1), c'est essentiellement le bruit thermique et de grenaille de sortie de l'amplificateur de bouclage.

. Bruit interne de "sortie" : situé immédiatement à la sortie de l'oscillateur (source A_2) il est constitué du bruit thermique et de grenaille d'entrée de l'amplificateur de bouclage d'une part et de l'amplificateur de sortie d'autre part.

. Bruit externe proprement dit : séparé de la boucle d'oscillation, il perturbe uniquement le signal (source A_3).

b) - Le bruit basse fréquence :

Ce bruit peut agir de deux façons différentes sur l'oscillateur : soit directement sur les paramètres définissant la fréquence de l'oscillateur, d'où alors son nom de bruit paramétrique ; soit être converti par l'intermédiaire des non-linéarités en bruit haute fréquence par un phénomène de multiplication, c'est pourquoi il est quelquefois appelé bruit multiplicatif. Dans ce cas, tout se passe comme si le spectre du bruit basse fréquence était transféré autour de la porteuse, pour cette raison nous l'appellerons plutôt bruit B.F. transféré. Suivant leur localisation nous pouvons distinguer parmi les sources de bruit B.F. :

. Le bruit B.F. du résonateur : dans l'oscillateur considéré la fréquence est, en principe, uniquement définie par le résonateur, en réalité, tous les éléments réactifs de la boucle d'oscillation interviennent dans l'expression de la fréquence et les fluctuations B.F. de ces éléments constituent le bruit paramétrique qui est principalement d'origine macroscopique (fluctuations de température, perturbations mécaniques, vibrations, etc...). La source B1 représente ce bruit paramétrique.

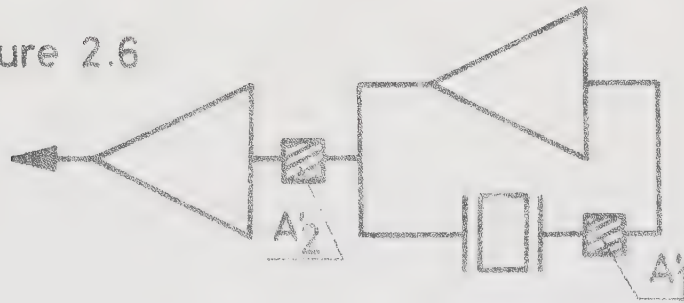
. Le bruit B.F. de l'amplificateur de bouclage : en plus de l'action décrite précédemment, les non-linéarités de l'amplificateur peuvent provoquer un transfert de certaines sources de bruit B.F. autour de la porteuse d'où la présence de la source B2.

. Le bruit B.F. de l'amplificateur de sortie : son action portant uniquement sur le signal, il s'agira par conséquent d'une source de bruit B.F. transféré (source B3).

Remarque :

Il est évident que selon la configuration de l'oscillateur, l'influence des différentes sources de bruit sur le spectre du signal de sortie ne sera pas la même. Par exemple, si l'amplificateur de sortie est placé comme sur la figure 2.6, l'effet de la source A'1 sera sensiblement le même que celui de la source A'2 ce qui n'est pas le cas pour les sources A1 et A2 de la configuration 2.5.

Figure 2.6



CHAPITRE 3

CARACTERISATION DES OSCILLATEURS

Le troisième chapitre concerne le traitement du signal. La notion de spectre et les définitions concernant l'analyse dans le domaine des fréquences sont précisées. Il est également fait une brève mention de l'analyse dans le domaine temporel.

3.1 - SIGNAL D'UN OSCILLATEUR

Il existe plusieurs méthodes pour caractériser les performances d'un oscillateur. Pour les générateurs harmoniques de haute précision, ce sont les notions de stabilité de fréquence et de pureté spectrale qui sont le plus utilisées (14, 16).

Physiquement, seul le signal de sortie de l'oscillateur étant accessible, c'est l'analyse de cette grandeur qui permettra de chiffrer la qualité du dispositif étudié. La caractérisation de l'oscillateur est par conséquent essentiellement un problème de traitement du signal.

Le signal issu d'un générateur de fréquence peut se mettre sous la forme :

$$(3.1) \quad v(t) = V(t) \cos (\omega_0 t + \phi(t))$$

$v(t)$ est la grandeur de sortie (tension ou courant). L'analyse de cette grandeur permettra de définir les performances de l'oscillateur.

$V(t)$: amplitude instantanée du signal. L'oscillateur étant perturbé, $V(t)$ est une variable aléatoire qui peut se mettre sous la forme :

$$(3.2) \quad V(t) = V_0 + W(t)$$

V_0 désignant l'amplitude moyenne ou amplitude du signal non perturbé.

$W(t)$: la variable stochastique correspondant aux fluctuations de l'amplitude autour de la valeur moyenne V_0 .

ω_0 : la pulsation du signal, cette pulsation serait celle de l'oscillateur s'il n'était pas perturbé, elle est liée aux dimensions ou paramètres du circuit, c'est une grandeur déterministe qui ne dépend pas seulement du résonateur mais également des éléments réactifs quelquefois parasites de la boucle d'oscillation et des non-linéarités du circuit.

$\phi(t)$: variable stochastique correspondant aux fluctuations de phase, la quantité :

$$(3.3) \quad \psi(t) = \omega_0 t + \phi(t)$$

est la phase totale du signal.

La pulsation instantanée du signal est alors définie par ^{*} :

$$(3.4) \quad \omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_0 + \dot{\phi}(t)$$

$\dot{\phi}(t)$ dérivée du processus $\phi(t)$ représente les fluctuations de fréquence ; ω_0 peut être choisi de telle sorte que la moyenne de $\dot{\phi}(t)$ soit nulle, il représentera alors la valeur moyenne du processus $\omega(t)$.

Remarque :

La grande sélectivité du résonateur a pour conséquence que les variables stochastiques $W(t)$ et $\phi(t)$ sont des fonctions aléatoires lentement variables devant $\cos \omega_0 t$ (17, 18).

3.2 - MODULATION D'UN SIGNAL

3.2.1 - Oscillateur perturbé et oscillateur modulé :

Nous avons vu que le signal issu d'un oscillateur peut se mettre sous la forme (3.1) :

$$v(t) = V(t) \cos (\omega_0 t + \phi(t))$$

dans laquelle $V(t)$ et $\phi(t)$ sont des fonctions lentement variables du temps.

Pour un oscillateur perturbé, ces fonctions sont des processus stochastiques mais on peut également envisager le cas, plus simple, où ces fonctions sont déterministes. Nous aurons alors affaire à un oscillateur modulé.

* Par abus de langage, nous désignerons souvent ω (pulsation ou fréquence angulaire) par fréquence.

Dans de nombreux cas, la connaissance du comportement d'un oscillateur soumis à une modulation permet d'obtenir des renseignements précieux sur sa réponse à une excitation aléatoire. A l'appui de cette affirmation on peut évoquer le fait qu'un processus aléatoire peut, dans la plupart des cas, être décomposé en série de Fourier (6).

3.2.2 - Modulation d'amplitude

Un signal est modulé en amplitude lorsque $V(t)$ est une fonction du temps et $\phi(t) = \phi_0 = c^{te}$, les conditions initiales pouvant d'ailleurs être choisies de telle sorte que $\phi_0 = 0$. $V(t)$ peut alors s'écrire : (19)

$$(3.5) \quad V(t) = V_0 (1 + m f(t))$$

V_0 : amplitude de l'onde non modulée.

m : facteur de modulation généralement inférieur à 1, il est parfois exprimé en pourcentage (taux de modulation). Le cas particulier le plus important est celui de la modulation sinusoïdale :

$$(3.6) \quad V(t) = V_0 (1 + m \cos \Omega t)$$

Ω est la pulsation de modulation que nous considérerons telle que $\Omega \ll \omega_0$. Le signal prend alors la forme :

$$(3.7) \quad v(t) = V_0 (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$$

3.2.3 - Modulation de phase

Nous nous intéresserons seulement à la modulation sinusoïdale, la fonction $\phi(t)$ de (3.1) s'écrit dans ce cas :

$$(3.8) \quad \phi(t) = \Delta \phi \cos \Omega t$$

d'où l'expression du signal :

$$(3.9) \quad v(t) = V_0 \cos (\omega_0 t + \Delta \phi \cos \Omega t)$$

la quantité $\Delta \phi \cos \Omega t$ s'appelle déviation ou excursion de phase, $\Delta \phi$, grandeur constante, est la déviation maximale de phase et Ω la pulsation de modulation ($\Omega \ll \omega_0$).

3.2.4 - Modulation de fréquence

Nous avons vu au § 3.1 que la pulsation instantanée d'un signal était la dérivée de sa phase totale (cf. relation (3.4)), on dit qu'un signal est modulé en fréquence lorsque la pulsation instantanée s'exprime sous la forme :

$$\omega(t) = \omega_0 + f(t)$$

dans le cas particulier d'une modulation sinusoïdale, nous avons :

$$(3.10) \quad \omega(t) = \omega_0 + \Delta \omega \cos \Omega t$$

La phase totale du signal est alors avec des conditions initiales convenables :

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \psi(t) &= \int \omega(t) dt = \omega_0 t + \frac{\Delta \omega}{\Omega} \sin \Omega t & \text{d'où :} \\ \phi(t) &= \frac{\Delta \omega}{\Omega} \sin \Omega t \end{aligned}$$

d'où l'expression de $v(t)$:

$$(3.12) \quad v(t) = V_0 \cos \left(\omega_0 t + \frac{\Delta \omega}{\Omega} \sin \Omega t \right)$$

Dans la relation (3.10) : $\Delta \omega \cos \Omega t$ s'appelle déviation de fréquence angulaire, $\Delta \omega$ excursion maximale de fréquence. Dans (3.11) $\frac{\Delta \omega}{\Omega}$ prend le nom d'indice de modulation, il joue un rôle important dans l'étude des perturbations de fréquence d'un oscillateur.

3.3 - SPECTRES D'UN SIGNAL

L'analyse spectrale d'un signal $v(t)$ permet souvent d'acquérir des renseignements importants sur sa structure, il est alors utile de définir un certain nombre de grandeurs couramment employées. Pour fixer les idées, dans ce paragraphe nous considérerons que $v(t)$ représente une tension (20).

3.3.1 - Densité spectrale d'énergie (d.s.e.)

Par définition, c'est le carré du module de la transformée de Fourier du signal $v(t)$ (21)

Soit $F_V(\omega)$ cette transformée, nous avons :

$$(3.13) \quad F_V(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt$$

Si $v(t)$ désigne une tension, $F_V(\omega)$ s'exprime alors en V/Hz. La densité spectrale d'énergie de $v(t)$ est donc :

$$(3.14) \quad E_V(\omega) = |F_V(\omega)|^2 \quad \text{l'unité étant ici en } V^2/\text{Hz}^2. \text{ Si l'on considère que } v(t) \text{ est appliquée à une résistance idéale de } 1\Omega, E_V(\omega) \text{ s'exprimera en J/Hz d'où le nom de densité spectrale d'énergie.}$$

La formule de Parseval permet de déterminer l'énergie totale fournie par le signal (22)

$$(3.15) \quad W_T = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F_V(\omega)|^2 d\omega$$

W_T s'exprime en Joules si $v(t)$ est appliqué sur une résistance unité.

3.3.2 - Densité spectrale de puissance (d.s.p.)

Nous avons défini la d.s.p. comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal considéré (cf. § 2.1.4) en utilisant (2.18) cette dernière s'écrit :

$$R_V(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) v(t+\tau) dt$$

et s'exprime en V ou en W si le signal est appliqué sur $R = 1\Omega$. Si le signal est T-périodique, la moyenne s'effectuera sur une période du signal, sinon elle sera obtenue à la limite lorsque T tend vers l'infini (cf. § 2.1.3c). Alors :

$$S_V(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_V(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

(cf. (2.23)) s'exprime en V^2/Hz ou en W/Hz sur $R = 1\Omega$.

La puissance dissipée par $v(t)$ dans cette résistance s'écrit cf. (2.26) :

$$(3.16) \quad P_T = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_V(\omega) d\omega \quad \text{exprimée en W.}$$

Rappelons ici par exemple que la d.s.p. d'un signal sinusoïdal pur s'exprime par : (11)

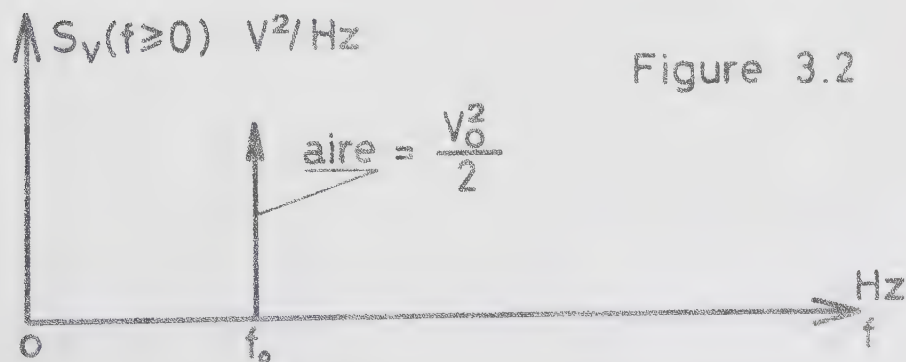
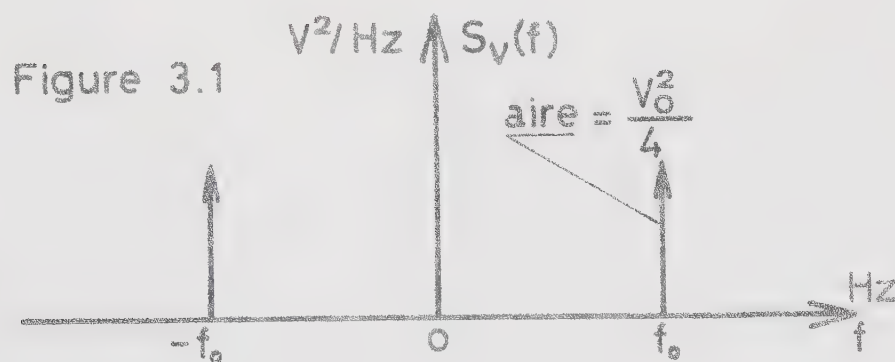
$$(3.17) \quad S_V(\omega) = \frac{V_0^2}{4} \cdot 2\pi (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$$

La distribution de Dirac $\delta(\omega \pm \omega_0)$ exprime que la puissance du signal est concentrée aux abscisses $\pm\omega_0$ de l'axe des pulsations. Il est plus souvent commode d'exprimer :

$$(3.18) \quad S_V(f) = 2\pi S_V(\omega) \quad (\text{cf. annexe 2.1}) \quad \text{ici :}$$

$$(3.19) \quad S_V(f) = \frac{V_0^2}{4} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

cette fonction est représentée sur la figure 3.1 tandis que le spectre à fréquences positives (cf. § 2.1.4) est représenté sur la figure 3.2.



3.3.3 - Répartition spectrale de puissance

Dans l'étude spectrale des signaux déterministes nous aurons affaire la plupart du temps à des d.s.p. représentées par des distributions de Dirac. Il sera commode dans ces conditions, d'introduire la notion de répartition spectrale de puissance en portant en ordonnée non plus la d.s.p. mais la puissance transportée par le signal dans un intervalle de fréquence de largeur infiniment petite df . La figure 3.3 représente la répartition spectrale de puissance $\sum_V(f)$:

$$(3.20) \quad \sum_V(f) = \int_{f - \frac{df}{2}}^{f + \frac{df}{2}} S_V(f') df'$$

exprimée en W si $v(t)$ est appliquée sur $R = 1\Omega$. (cf. annexe 3.1).

Comme pour la d.s.p. on définit la répartition spectrale de puissance à fréquences positives (figure 3.3).

$$(3.21) \quad \sum_V(f \geq 0) = \int_{f - \frac{df}{2}}^{f + \frac{df}{2}} S_V(f' \geq 0) df' = 2 \sum_V(f)$$

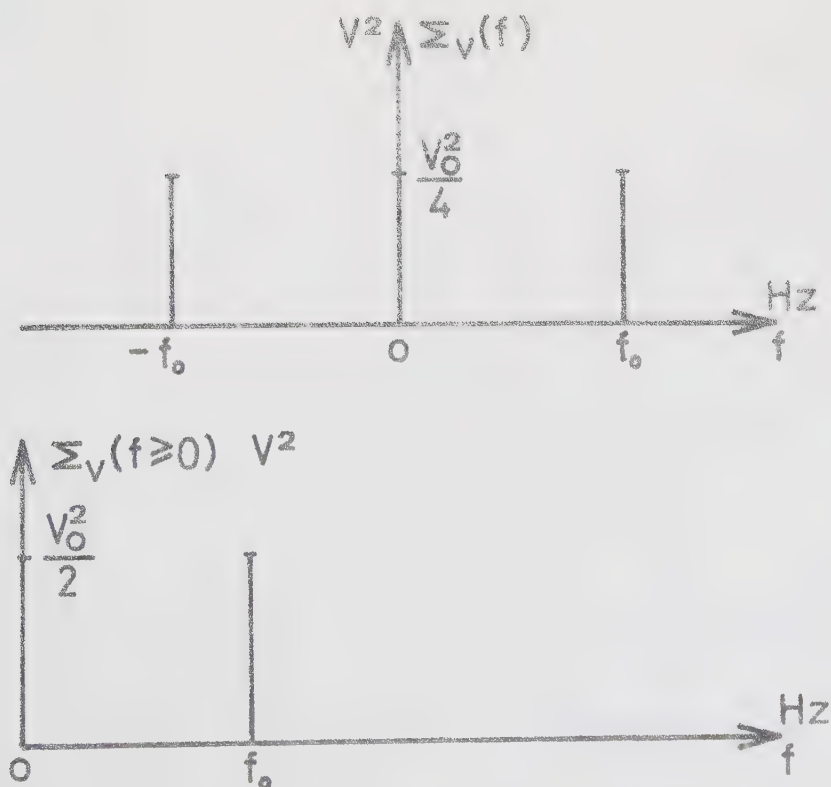


Figure 3.3

3.3.4 - Spectres d'un signal modulé

a) - Modulation d'amplitude :

La figure 3.4 représente la répartition spectrale $\sum_v(f \geq 0)$ du signal $v(t)$ défini par la relation (3.7). La puissance totale de l'onde modulée calculée par (3.16) s'écrit ici :

$$(3.22) \quad P_T = \frac{V_0^2}{2} \left(1 + \frac{m^2}{2} \right)$$

L'amplitude des raies de modulation ne dépend pas de la fréquence de modulation ; l'enveloppe de ces raies, lorsque la fréquence de modulation varie, est donc une constante si le spectre du signal de modulation est lui-même constant (cf. bruit blanc d'amplitude).

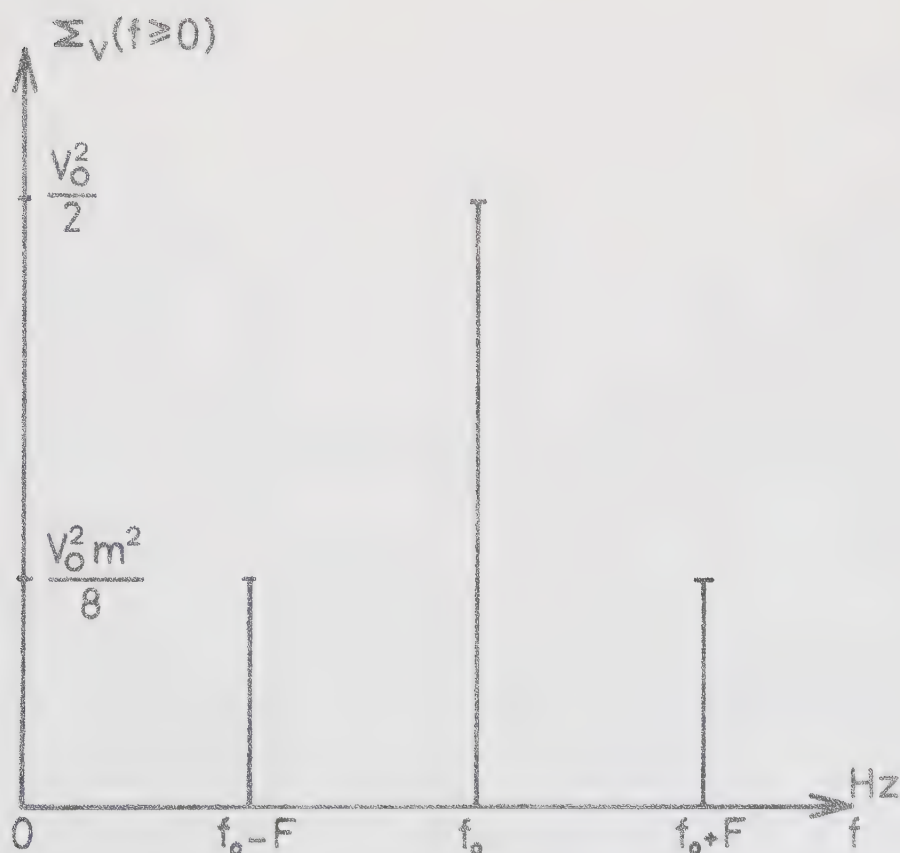


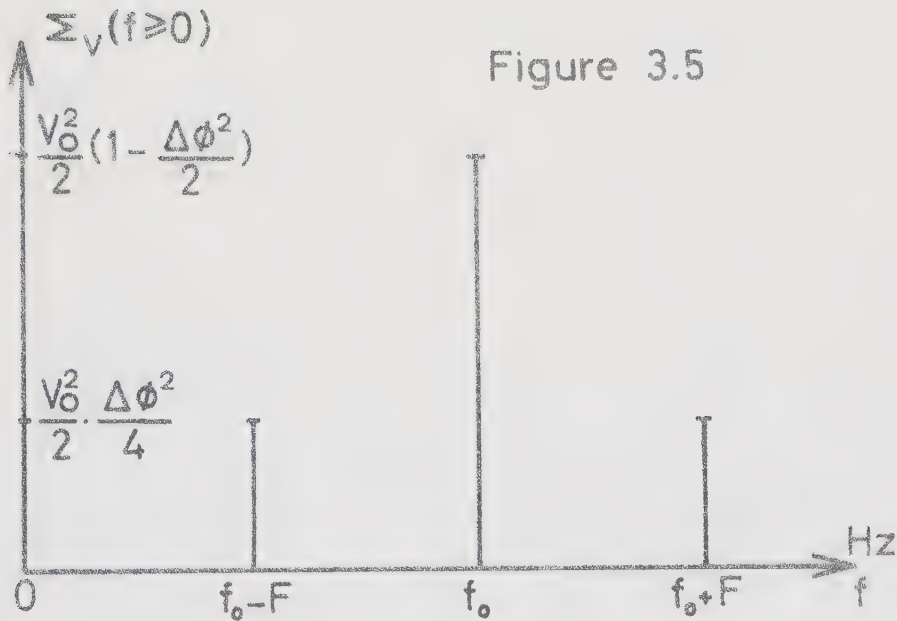
Figure 3.4

b) - Modulation de phase

Lorsque la déviation maximale de phase $\Delta\phi$ (cf. (3.8)) reste très inférieure à l'unité (ce qui est justifié lorsqu'il s'agit de bruit), la répartition spectrale de puissance du signal $v(t)$ défini par (3.9) est représentée par la figure 3.5. La puissance totale de l'onde modulée s'exprime par :

$$(3.23) \quad P_T = \frac{V_0^2}{2} \left(1 - \frac{\Delta\phi^2}{2}\right) + 2 \frac{V_0^2}{2} \cdot \frac{\Delta\phi^2}{4} = \frac{V_0^2}{2}$$

Ce résultat est général : quel que soit $\Delta\phi$, la puissance contenue dans les bandes latérales est prise à la porteuse.

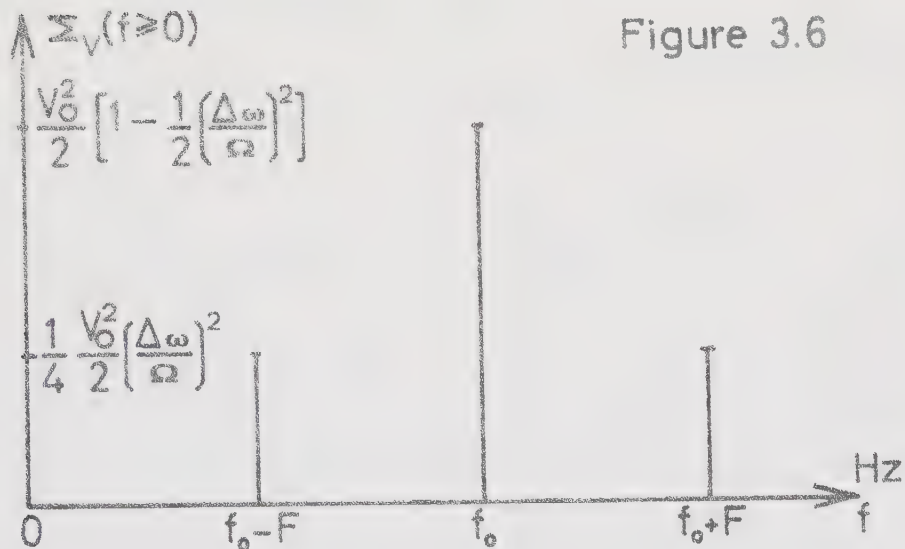


On peut faire la même remarque que pour la modulation d'amplitude en ce qui concerne l'enveloppe des raies de modulation (cf. bruit blanc de phase).

c) - Modulation de fréquence

De même que pour la modulation de phase, si l'indice de modulation $\Delta\omega/\Omega$ (cf. (3.11)) est très inférieur à un, la répartition spectrale de puissance pourra être représentée comme sur la figure 3.6. Ici nous constatons que la condition de validité n'est pas remplie pour toutes les fréquences de modulation, le spectre obtenu ne sera valable que pour les pulsations de modulation Ω telles que : $\Omega \gg \Delta\omega$ (approximation du faible indice de modulation).

Comme pour la modulation de phase, la puissance totale de l'onde modulée est égale à la puissance de l'onde non modulée, la puissance contenue dans les raies de modulation est prise à la porteuse.



Pour une déviation maximale de fréquence $\Delta\omega$ et une amplitude V_0 constantes, la répartition spectrale de puissance varie en $1/\Omega^2$. On ne peut cependant pas en déduire le comportement asymptotique lorsque Ω tend vers zéro car l'expression de $S_V(f \geq 0)$ calculée à partir de (2.23) n'est valable que pour $\Omega \gg \Delta\omega$ (cf. bruit blanc de fréquence).

3.4 - SPECTRES EXPERIMENTAUX

Nous avons défini précédemment la densité spectrale de puissance d'une façon axiomatique comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal. Pour obtenir expérimentalement un spectre conforme à la définition, il faudrait remplir deux conditions :

- Analyser le signal pendant un temps infini.
- Utiliser un filtre d'analyse de largeur nulle.

Comme il est impossible physiquement de réaliser ces conditions, nous allons étudier ce que devient le spectre lorsque l'une de ces conditions n'est pas remplie.

3.4.1 - Temps d'analyse limité

Pour un signal sinusoïdal pur, la densité spectrale de puissance peut se mettre sous la forme (10) :

$$(3.24) \quad S_V(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} V_0 \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt \right|^2$$

Le spectre obtenu en limitant le temps d'analyse à la valeur T s'écrit :

$$(3.25) \quad S_V(\omega, T) = \frac{V_0^2}{T} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt \right|^2$$

$$= \frac{V_0^2}{T} \left(\frac{\sin(\omega_0 + \omega) \frac{T}{2}}{\omega_0 + \omega} + \frac{\sin(\omega_0 - \omega) \frac{T}{2}}{\omega_0 - \omega} \right)^2$$

Soit :

$$(3.26) \quad S_V(\omega \geq 0, T) = \frac{2V_0^2}{T} \left(\frac{\sin(\omega_0 - \omega) \frac{T}{2}}{\omega_0 - \omega} \right)^2$$

Pour T fixé, $S_V(\omega \geq 0, T)$ est maximale pour $\omega = \omega_0$ et nous avons :

$$(3.27) \quad S_V(\omega_0, T) = \frac{V_0^2 T}{2} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \infty$$

c'est-à-dire que le spectre tend vers le spectre initial.

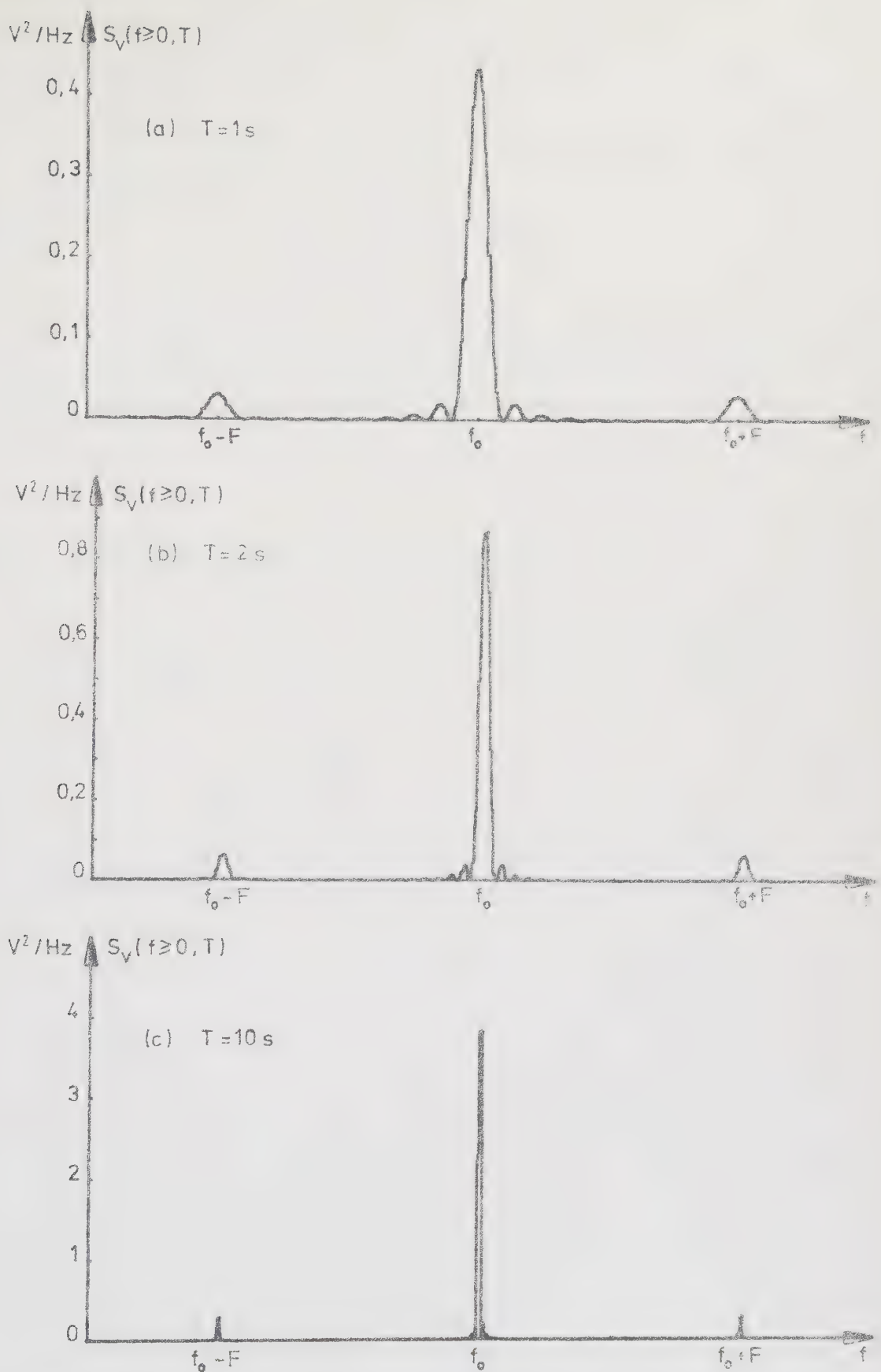


Figure 3.7 : Influence du temps d'analyse sur la forme du spectre d'un signal modulé en fréquence :

- Amplitude du signal : $V_0 = 1\text{ V}$
- Fréquence de la porteuse : $f_0 = 5\text{ MHz}$
- Fréquence de modulation : $F = 10\text{ Hz}$
- Excursion maximale de fréquence : $\Delta f = 5\text{ Hz}$
- Temps d'analyse : $T = 1, 2, 10\text{ s}$

Il est évident que le temps d'analyse n'affecte pas la puissance du signal, en effet :

$$(3.28) \quad \forall T, \quad P_T = \int_{-\infty}^{+\infty} S_V(f \geq 0, T) df = \frac{V_0^2}{2}$$

Les résultats obtenus précédemment s'adaptent parfaitement aux cas des différents types de modulation. La figure 3.7 montre l'influence du temps d'analyse sur la forme du spectre d'un signal modulé en fréquence.

3.4.2 - Filtre d'analyse de largeur non nulle

La d.s.p. de la réponse d'un filtre peut être approximée par une fonction gaussienne (figure 3.8), l'aire sous cette courbe correspondant à une puissance unité nous avons :

$$(3.29) \quad g(f) = \frac{1}{\Delta F} e^{-\frac{\pi f^2}{(\Delta F)^2}}$$

ΔF est la largeur équivalente du filtre, c'est-à-dire la largeur du filtre rectangulaire de même hauteur qui couvrirait la même puissance.

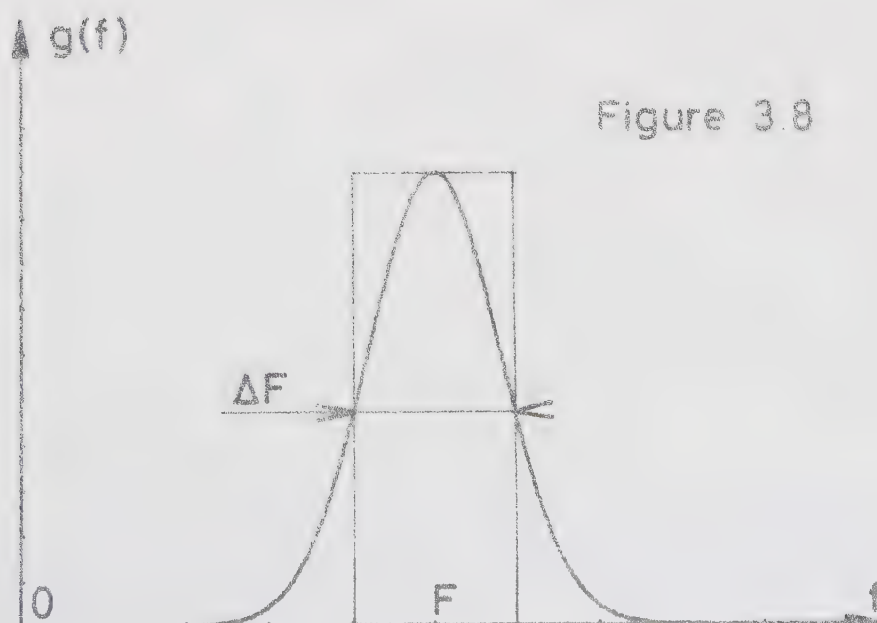


Figure 3.8

Si $S_V(f \geq 0)$ représente la d.s.p. du signal non filtré, le spectre obtenu à la sortie du filtre sera défini par la convolution entre $g(f)$ et $S_V(f)$ ce qui s'écrit : (10)

$$(3.30) \quad S_V(F \geq 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_V(f \geq 0) g(F-f) df$$

Pour un signal harmonique, nous avons : $S_V(f \geq 0) = \frac{V_0^2}{2} \delta(f-f_0)$
d'où :

$$(3.31) \quad S_V(F \geq 0) = \frac{V_0^2}{2\Delta F} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi(F-f)^2}{(\Delta F)^2}} \delta(f-f_0) df$$

soit :

$$(3.32) \quad S_V(F \geq 0) = \frac{V_0^2}{2\Delta F} e^{-\frac{\pi(f_0-F)^2}{(\Delta F)^2}}$$

Nous constatons que l'impulsion de Dirac disparaît, elle est remplacée par la fonction ^{filtre} centrée en f_0 . Remarquons également que lorsque $F = f_0$,

$$(3.33) \quad S_V(F) = \frac{V_0^2}{2\Delta F}$$

il passe par un maximum proportionnel à la puissance transportée par le signal à la fréquence f_0 . L'analyse avec un tel filtre renseigne donc directement sur la répartition spectrale de puissance.

Nous voyons que si la largeur du filtre tend vers zéro :

$$(3.34) \quad S_V(F) = \frac{V_0^2}{2\Delta F} \xrightarrow{\Delta F \rightarrow 0} \infty \quad \text{et plus précisément :}$$

$$(3.35) \quad S_V(F \geq 0) = \frac{V_0^2}{2\Delta F} e^{-\frac{\pi(f_0-F)^2}{(\Delta F)^2}} \xrightarrow{\Delta F \rightarrow 0} \frac{V_0^2}{2} \delta(f_0-F)$$

on retrouve le spectre initial.

La puissance du signal définie par :

$$(3.36) \quad P_T = \int_{-\infty}^{+\infty} S_V(F \geq 0) dF = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V_0^2}{2\Delta F} e^{-\frac{\pi(f_0-F)^2}{(\Delta F)^2}} dF = \frac{V_0^2}{2}$$

est indépendante de la largeur du filtre.

Pour un signal modulé, chaque Dirac est remplacé par la fonction filtre. La figure 3.9 montre l'influence de la largeur du filtre sur la forme du spectre.

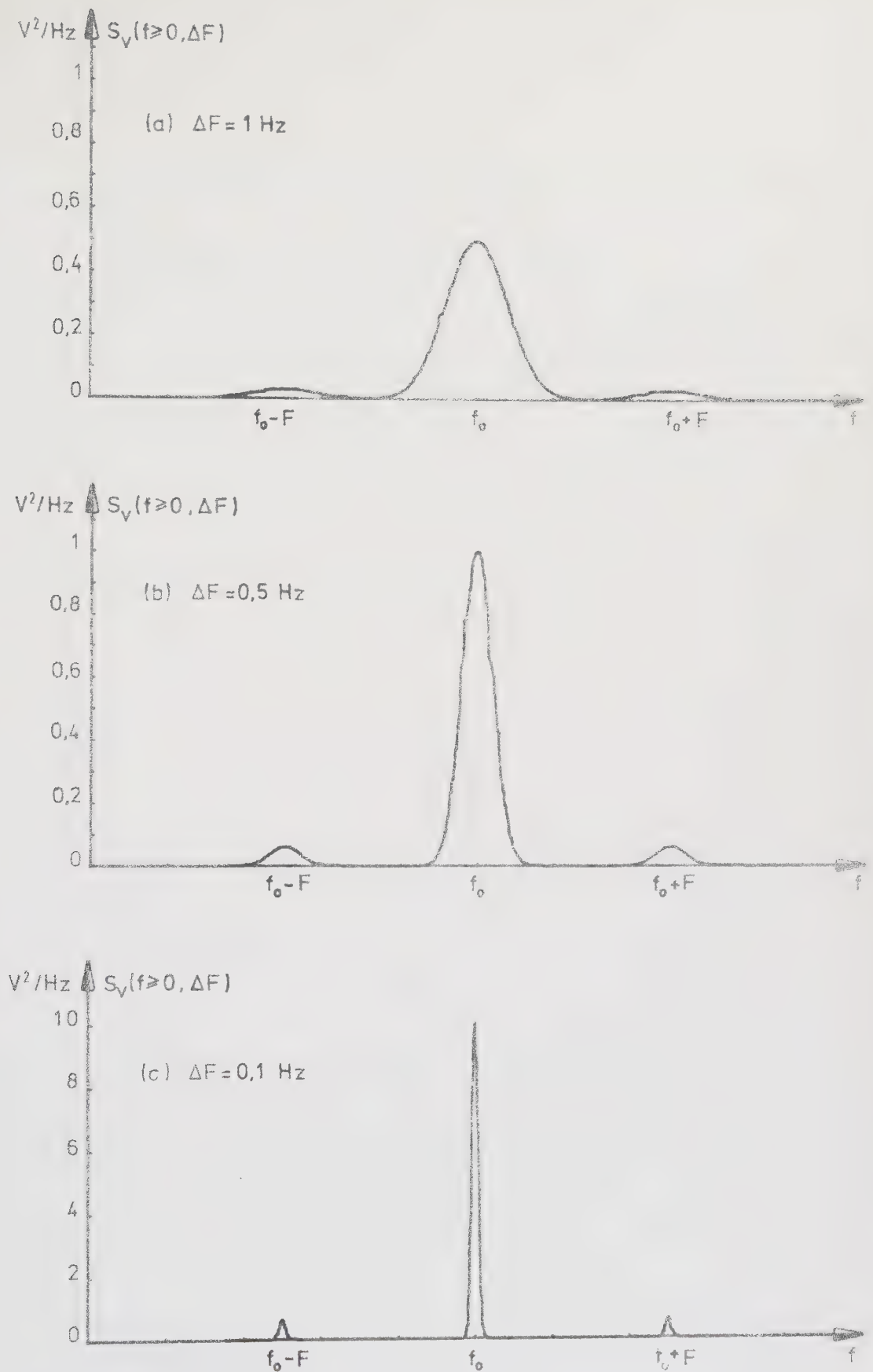


Figure 3.9 : Influence de la largeur du filtre sur la forme du spectre d'un signal modulé en amplitude :

- Amplitude du signal : $V_0 = 1 \text{ V}$
- Fréquence de la porteuse : $f_0 = 5 \text{ MHz}$
- Fréquence de modulation : $F = 10 \text{ Hz}$
- Facteur de modulation : $m = 0,5$
- Largeur du filtre d'analyse : $\Delta F = 1 ; 0,5 ; 0,1 \text{ Hz}$

3.4.3 - Etude du comportement d'un oscillateur perturbé

Comme nous l'avons déjà suggéré précédemment, lorsqu'un oscillateur (ou tout autre dispositif) est perturbé par un bruit dont on connaît le spectre, il est possible de simuler cette perturbation en remplaçant la source de bruit par un générateur harmonique de fréquence variable dont la répartition spectrale de puissance suit la même loi que le spectre de la source de bruit. Le spectre des perturbations du signal de sortie est alors obtenu par l'étude de l'enveloppe des raies de modulation provoquées par la perturbation harmonique.

Tout se passe comme si l'on étudiait l'effet de chaque composante de Fourier de la source de bruit (figure 3.10).

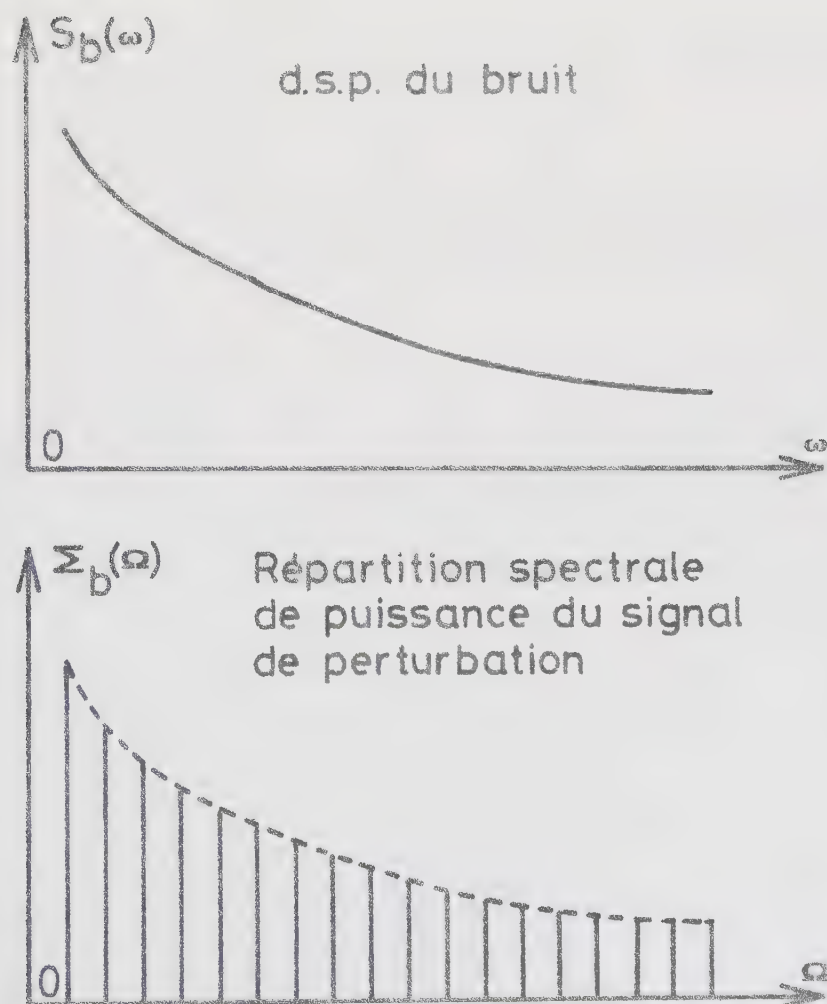


Figure 3.10

3.5 - PRINCIPAUX TYPES D'ANALYSE DU SIGNAL

3.5.1 - Analyse spectrale

Nous avons vu au paragraphe 3.1 que la grandeur permettant de caractériser l'oscillateur est le signal de sortie :

$$v(t) = V(t) \cos (\omega_0 t + \phi(t)) \quad \text{cf. (3.1)}$$

Suivant le traitement que l'on fera subir à ce signal, nous pourrons définir différents aspects des performances de l'oscillateur :

a) L'analyse du signal complet $v(t)$ fournit le spectre radio-fréquence ou spectre RF : $S_V(\omega)$.

b) La détection de $v(t)$ permet de déterminer le spectre des fluctuations d'amplitude : $S_W(\omega)$, cf. relation (3.2).

c) Si le signal est appliqué à un phasemètre idéal, l'analyse de la tension de sortie de ce dispositif permet d'obtenir le spectre des fluctuations de phase $S_\phi(\omega)$, cf. (3.3)

d) L'analyse de la tension de sortie d'un discriminateur idéal attaqué par le signal fournit le spectre des fluctuations de fréquence $S_{\dot{\phi}}(\omega)$, cf. (3.4)

Remarque :

La formule (2.31) permet d'établir immédiatement la relation entre $S_\phi(\omega)$ et $S_{\dot{\phi}}(\omega)$, en effet, le processus $\dot{\phi}(t)$ peut être considéré comme la sortie d'un système linéaire différentiateur dont l'entrée est le processus $\phi(t)$ et la sortie $\dot{\phi}(t)$ et dont la réponse impulsionnelle est :

$$h(t) = \frac{d}{dt} (\delta(t))$$



La fonction de transfert $H(j\omega)$ d'un tel système s'écrit par conséquent cf. (2.28) : (11)

$$(3.37) \quad H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dt} (\delta(t)) \right) e^{-j\omega t} dt = - \left(\frac{d}{dt} e^{-j\omega t} \right)_{t=0} = j\omega$$

L'application de (2.31) donne ici :

$$(3.38) \quad S_{\dot{\phi}}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{\phi}(\omega) = \omega^2 S_{\phi}(\omega)$$

3.5.2 - Analyse temporelle

Au paragraphe 3.1 la quantité $\dot{\phi}(t)$ a été définie comme un processus stochastique de moyenne nulle. Comme il est difficile d'enregistrer directement ce processus $\dot{\phi}(t)$, on définit un nouveau processus $\overline{\dot{\phi}(t, \tau)}$ de moyenne nulle qui est la moyenne de $\dot{\phi}(t)$ pendant le temps d'intégration τ :

$$(3.39) \quad \overline{\dot{\phi}(t, \tau)} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \dot{\phi}(t') dt' = \frac{1}{\tau} (\phi(t+\tau) - \phi(t)) = \frac{\Delta\phi(t)}{\tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \dot{\phi}(t)$$

Expérimentalement, il n'est pas possible de réaliser un grand nombre d'oscillateurs identiques de manière à déterminer les statistiques du processus $\overline{\dot{\phi}(t, \tau)}$, cependant l'hypothèse d'ergodicité permet de remplacer les échantillons $\overline{\dot{\phi}(t, \tau)}$ issus de N oscillateurs semblables étudiés entre les instants t et $t+\tau$ par N échantillons prélevés à intervalles réguliers T sur le signal d'un même oscillateur. (figure 3.11)

Dans ces conditions, nous pouvons accéder aux paramètres statistiques de la variable aléatoire $\overline{\dot{\phi}(t, \tau)}$ en remplaçant l'opérateur espérance mathématique par l'opération moyenne sur un grand nombre d'échantillons (6) ces échantillons provenant de l'enregistrement du signal d'un seul oscillateur.

La relation (3.39) prend alors la forme suivante :

$$(3.40) \quad \overline{\dot{\phi}(nT, \tau)} = \frac{1}{\tau} \int_{nT}^{nT+\tau} \dot{\phi}(t) dt = \frac{1}{\tau} (\phi(nT+\tau) - \phi(nT)) = \frac{\Delta\phi_n}{\tau}$$

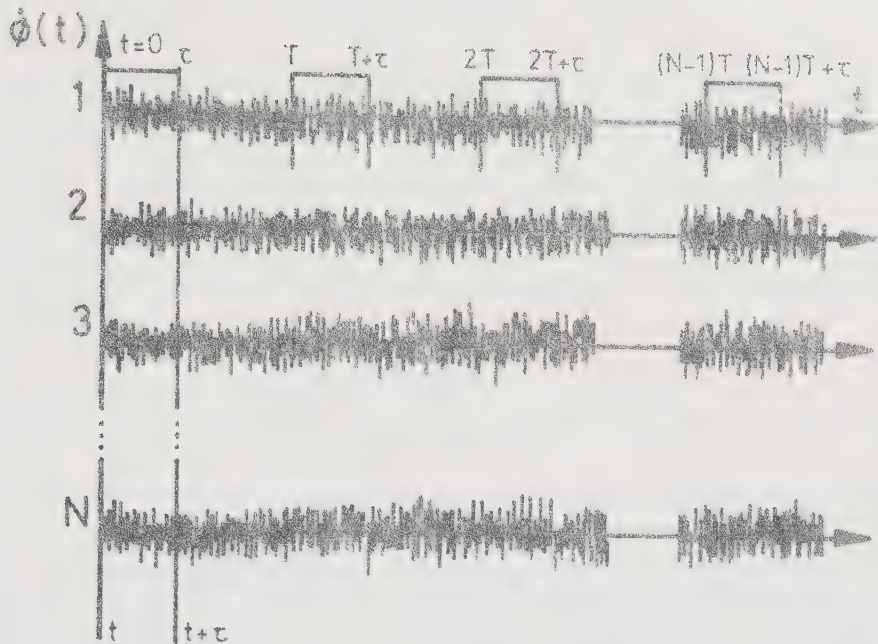


Figure 3.11

Pour N très grand, les statistiques du processus $\frac{\Delta\phi_n}{\tau}$ sont alors :

pour la moyenne :

$$(3.41) \quad \eta(N, T, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Delta\phi_n}{\tau} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \eta(\infty, T, \tau) = 0$$

et pour la variance :

$$(3.42) \quad \sigma^2(N, T, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{\Delta\phi_n}{\tau} - \eta(N, T, \tau) \right)^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sigma^2(\infty, T, \tau)$$

Le processus $\overline{\phi(t, \tau)}$ étant ergodique, nous avons :

$$(3.43) \quad \sigma^2(\overline{\phi(t, \tau)}) = \sigma^2(\infty, T, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \sigma^2(\phi(t))$$

Cette grandeur est encore impossible à déterminer expérimentalement, par contre nous pouvons obtenir des renseignements sur $\sigma^2(\overline{\phi(t, \tau)})$ en étudiant la nouvelle variable aléatoire définie par $\sigma^2(N, T, \tau)$ dont l'espérance mathématique donnera une estimation de $\sigma^2(\overline{\phi(t, \tau)})$.

Pour déterminer la précision de cette estimation, on définit le rapport (16) :

$$(3.44) \quad R(N, T, \tau) = \frac{E \{ \sigma^2(N, T, \tau) \}}{\sigma^2(\phi(t, \tau))}$$

si ce rapport vaut 1, l'estimation $E\{\sigma^2(N, T, \tau)\}$ est dite sans biais. Souvent, la définition (3.42) de $\sigma^2(N, T, \tau)$ introduit précisément un biais, on modifie alors, selon la nature du processus étudié, cette définition de sorte que $R(N, T, \tau)$ soit ramené à 1 (24). Par exemple, si les variables aléatoires $\Delta\phi_n/\tau$ ne sont pas corrélées, on utilise la définition suivante (25) :

$$(3.45) \quad \sigma^2(N, T, \tau) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{\Delta\phi_n}{\tau} - \eta(N, T, \tau) \right)^2$$

pour laquelle $E\{\sigma^2(N, T, \tau)\}$ est une estimation sans biais de $\sigma^2(\phi(t, \tau))$.

La variance d'Allan (26) est un cas particulier important de cette définition car elle est presque universellement utilisée pour l'estimation de l'instabilité des oscillateurs.

La variance d'Allan est définie à partir de (3.45) en faisant $N = 2$ et $T = \tau$ (cf. figure 3.12), l'espérance mathématique étant ici encore remplacée par une moyenne statistique effectuée sur un nombre M d'échantillons $\sigma_m^2(2, \tau, \tau)$ * :

$$(3.46) \quad E \{ \sigma^2(2, \tau, \tau) \} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sigma_m^2(2, \tau, \tau)$$

avec :

$$(3.47) \quad \sigma_m^2(2, \tau, \tau) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\Delta\phi_m - \Delta\phi_{m-1}}{\tau} \right\}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \overline{\phi(m\tau, \tau)} - \overline{\phi((m-1)\tau, \tau)} \right\}$$

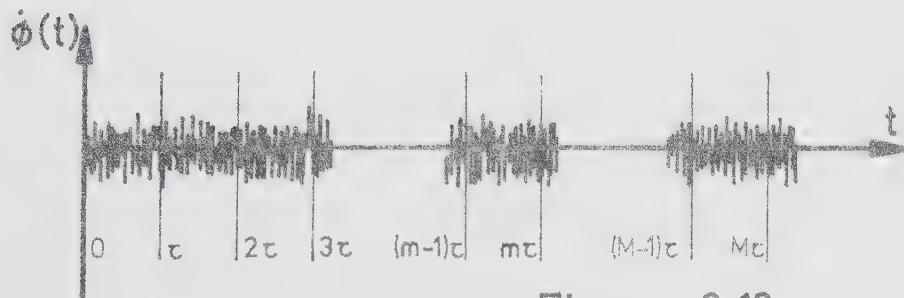


Figure 3.12

* En pratique, l'instabilité sur 1 ms par exemple est déterminée à partir d'une trentaine d'échantillons.

En résumé, le paramètre fondamental pour l'étude de l'instabilité des oscillateurs dans le domaine temporel (25) est la variance des fluctuations de la fréquence moyenne sur un temps τ définie par :

$$(3.48) \quad \sigma^2(\overline{\dot{\phi}(t, \tau)}) = E \{ \sigma^2(2, \tau, \tau) \} = \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M \{ \overline{\dot{\phi}(m\tau, \tau)} - \overline{\dot{\phi}((m-1)\tau, \tau)} \}^2$$

On utilise également (15) l'instabilité relative de fréquence pendant le temps d'intégration τ définie par :

$$(3.49) \quad I(\tau) = \frac{\sigma(\overline{\dot{\phi}(t, \tau)})}{\omega_0}$$

3.5.3 - Relation entre domaine temporel et domaine spectral (16)

Le paramètre $\sigma^2(\overline{\dot{\phi}(t, \tau)})$ peut se calculer à partir de la relation (2.10) :

$$(3.50) \quad \sigma^2(\overline{\dot{\phi}(t, \tau)}) = E \{ (\overline{\dot{\phi}(t, \tau)})^2 \} - (E\{\overline{\dot{\phi}(t, \tau)}\})^2$$

Au début du paragraphe précédent, nous avons défini $\overline{\dot{\phi}(t, \tau)}$ comme un processus de moyenne nulle, par conséquent :

$$(3.51) \quad E \{ \overline{\dot{\phi}(t, \tau)} \} = 0 \rightarrow \sigma^2(\overline{\dot{\phi}(t, \tau)}) = E \{ (\overline{\dot{\phi}(t, \tau)})^2 \}$$

En utilisant la relation (3.39) nous obtenons :

$$(3.52) \quad \sigma^2(\overline{\dot{\phi}(t, \tau)}) = E \left\{ \frac{1}{\tau^2} \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \dot{\phi}(t_1) dt_1 \cdot \dot{\phi}(t_2) dt_2 \right\}$$

Les opérateurs E et $\int$ étant linéaires, nous pouvons les intervertir :

$$(3.53) \quad \sigma^2(\overline{\dot{\phi}(t, \tau)}) = \frac{1}{\tau^2} \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} E\{\dot{\phi}(t_1) \dot{\phi}(t_2)\} dt_1 dt_2$$

On reconnaît sous le signe somme la fonction d'autocorrélation de $\dot{\phi}(t)$:

$$E \{ \dot{\phi}(t_1) \dot{\phi}(t_2) \} = R_{\dot{\phi}}(t_1, t_2) \quad \text{cf. (2.7)}$$

Les fluctuations de fréquences étant supposées stationnaires, $R_{\dot{\phi}}(t_1, t_2)$ ne dépend que de $t_2 - t_1$ et l'on peut remplacer dans (3.53)

$R_{\phi}^{\circ}(t_1, t_2)$ par son expression en fonction de $S_{\phi}^{\circ}(\omega)$ cf. (2.24) :

$$R_{\phi}^{\circ}(t_2 - t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi}^{\circ}(\omega) \cos \omega(t_2 - t_1) d\omega$$

Après avoir interverti les signes sommes, nous obtenons :

$$(3.54) \quad \sigma^2(\overline{\phi(t, \tau)}) = \frac{1}{2\pi\tau^2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi}^{\circ}(\omega) \left(\int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \cos \omega(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 \right) d\omega$$

Le calcul de la somme double ne présente pas de difficultés (cf. annexe 3.2) et nous parvenons à la relation fondamentale :

$$(3.55) \quad \sigma^2(\overline{\phi(t, \tau)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi}^{\circ}(\omega) \left(\frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right)^2 d\omega$$

CHAPITRE 4

LE RESONATEUR

Le schéma électrique équivalent d'un résonateur à quartz est brièvement décrit au début de ce chapitre. Les différentes fréquences caractéristiques sont ensuite explicitées en étudiant la réponse du résonateur à une excitation extérieure.

Un certain nombre de définitions et de notations utilisées par la suite sont ainsi précisées.

4.1 - SCHEMA EQUIVALENT DU RESONATEUR A QUARTZ

Ce schéma est établi à partir des équations fondamentales décrivant la réponse du résonateur soumis à une excitation périodique (28) ces équations étant constituées par la relation effort-déformation, l'expression du déplacement électrique et l'équation d'équilibre (29).

Nous nous bornerons à donner l'expression des éléments motionnels et de la capacité parallèle en fonction des caractéristiques physiques du matériau quartz pour une plaque de coupe Y, de dimensions latérales infinies vibrant en cisaillement d'épaisseur* (cf. figure 4.1)

* C'est le cas des résonateurs à quartz à 5 et 100 MHz.

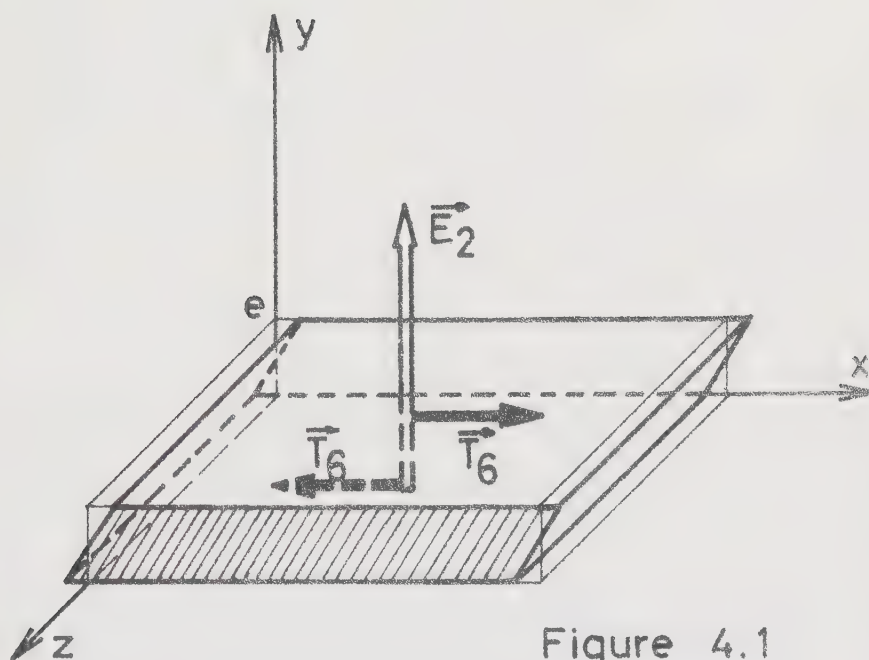


Figure 4.1

On montre que le schéma électrique équivalent se ramène à celui de la figure 4.2 :

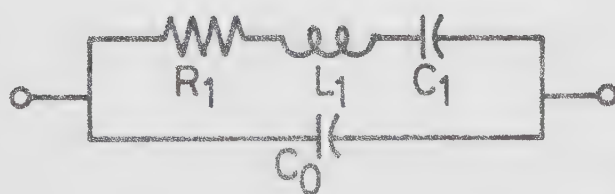


Figure 4.2

avec :

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 \approx \frac{8 S e_{26}^2}{e \pi^2 C_{66}^D} \quad (a) \\ L_1 \approx \frac{\rho e^3}{8 n^2 e_{26}^2 S} \quad (b) \\ R_1 \approx \frac{r_{66} e \pi^2 n^2}{8 e_{26}^2 S} \quad (c) \\ C_0 \approx \frac{\epsilon_{22} S}{e} \quad (d) \end{array} \right.$$

où :

- S : surface des électrodes
- e : épaisseur de la lame de quartz
- e_{26} : coefficient piézoélectrique
- C_{66}^D : coefficient élastique à déplacement électrique constant ou nul
- ρ : masse spécifique
- r_{66} : coefficient d'amortissement
- ϵ_{22} : coefficient de polarisation électrique
- n : ordre du partiel sur lequel vibre la lame
- R_1, L_1, C_1 sont les éléments motionnels du quartz,
- C_0 est la capacité parallèle due aux électrodes d'excitation.

Nous n'aborderons que brièvement le problème de la mesure de ces paramètres dans la troisième partie, la question étant abondamment traitée dans la littérature (30, 31, 32).

4.2 - REPONSE DU RESONATEUR A UNE EXCITATION EXTERIEURE

4.2.1 - Impédance équivalente du résonateur

La figure 4.2 montre que le quartz est composé de deux impédances en parallèle, l'une constituée des éléments motionnels R_1, L_1, C_1 , l'autre de la capacité C_0 . Les impédances de ces deux branches sont respectivement :

$$(4.2) \left\{ \begin{array}{l} Z_1(p) = R_1 + pL_1 + \frac{1}{pC_1} \\ \text{et } Z_o(p) = \frac{1}{pC_o} \end{array} \right.$$

où p désigne l'opérateur de Laplace. De façon générale, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, nous emploierons la même notation pour les fonctions du temps et leur transformée :

$$f(t) = f(p)$$

L'impédance totale présentée par le quartz s'écrit :

$$(4.3) \quad Z_Q(p) = \frac{Z_1 Z_o}{Z_1 + Z_o} = \frac{p^2 + p \frac{R_1}{L_1} + \frac{1}{L_1 C_1}}{p C_o \left(p^2 + p \frac{R_1}{L_1} + \frac{C_o + C_1}{C_o C_1 L_1} \right)}$$

Nous pouvons à présent définir plusieurs grandeurs caractéristiques du résonateur :

$$(4.4) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \omega_o^2 = \frac{1}{L_1 C_1}, \quad f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} : \text{fréquence de résonance de la branche série.} \\ (b) \quad \omega_p^2 = \frac{C_o + C_1}{C_o C_1 L_1} = \frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_1 C_o}, \quad f_p : \text{fréquence d'antirésonance du circuit parallèle} \\ (c) \quad \omega_d^2 = \frac{1}{L_1 C_o} \rightarrow \omega_p^2 = \omega_o^2 + \omega_d^2 \quad \text{et} \quad \frac{\omega_d^2}{\omega_o^2} = \frac{C_1}{C_o} \\ (d) \quad Q = \frac{L_1 \omega_o}{R_1} : \text{coefficient de surtension du résonateur.} \end{array} \right.$$

Des valeurs couramment rencontrées pour un quartz 5 MHz partiel 5 sont indiquées ci-dessous : (paramètres mesurés à 20° C)

$$\begin{array}{lll} f_o = 5\,000\,189 \text{ Hz} & R_1 \approx 77,4 \, \Omega & C_1 \approx 2 \cdot 10^{-4} \text{ pF} \\ Q = 2 \cdot 10^6 & L_1 \approx 5 \text{ H} & C_o \approx 2 \text{ pF} \end{array}$$

Les définitions (4.4) permettent d'écrire $Z_Q(p)$ sous la forme :

$$(4.5) \quad Z_Q(p) = \frac{p^2 + \frac{\omega_o}{Q} p + \omega_o^2}{p C_o \left(p^2 + \frac{\omega_o}{Q} p + \omega_p^2 \right)}$$

4.2.2 - Equation de fonctionnement

Pour déterminer la réponse en amplitude et en phase du résonateur, nous utiliserons le dispositif expérimental représenté par la figure 4.3.b

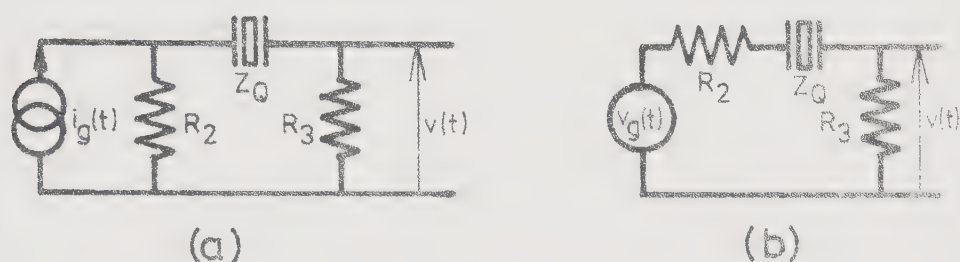


Figure 4.3

Ce schéma peut être obtenu à partir de celui de la figure 4.3.a en remplaçant simplement le générateur de Norton par le générateur de Thévenin équivalent : $v_g(t) = R_2 i_g(t)$, ce qui fait apparaître l'analogie avec le schéma équivalent de l'oscillateur établi au § 1.5. Cette disposition permet d'étudier le résonateur placé dans les mêmes conditions que lorsqu'il est utilisé dans un oscillateur, il suffit pour cela que les résistances R_2 et R_3 soient équivalentes aux impédances de sortie et d'entrée de l'amplificateur de bouclage (cf. figure 1.5). Pour le type d'oscillateur utilisé, ces impédances sont généralement de l'ordre de 50 Ω .

$v_g(t)$ est ici un générateur de signaux.

La relation entre les tensions de sortie $v(t)$ et d'entrée $v_g(t)$ est immédiate, en notation de Laplace :

$$(4.6) \quad (R_2 + R_3 + Z_Q(p))v(p) = R_3 v_g(p)$$

En remplaçant Z_Q par son expression (4.5), nous obtenons :

$$(4.7) \quad \left\{ C_o(R_2 + R_3)p^3 + \left(1 + \frac{\omega_o}{Q} C_o(R_2 + R_3)\right)p^2 + \left(\frac{\omega_o}{Q} + C_o(R_2 + R_3)\omega_o^2\right)p + \omega_o^2 \right\} v(p) = R_3 C_o \left(p^3 + \frac{\omega_o}{Q} p^2 + \omega_o^2 p \right) v_g(p).$$

Pour alléger un peu l'écriture de cette expression, nous utiliserons les notations suivantes :

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = C_o(R_2 + R_3) \\ \theta_3 = C_o R_3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \theta \text{ et } \theta_3 \text{ sont des constantes homogènes} \\ \text{à des temps.} \end{array}$$

L'équation différentielle permettant d'étudier la réponse du résonateur est obtenue en remplaçant l'opérateur p par l'opérateur d/dt . Nous obtenons alors une équation différentielle du troisième ordre :

$$(4.9) \quad \begin{aligned} & \theta \frac{d^3 v}{dt^3} + (1 + \omega_o \frac{\theta}{Q}) \frac{d^2 v}{dt^2} + (\frac{\omega_o}{Q} + \theta \omega_p^2) \frac{dv}{dt} + \omega_o^2 v \\ & = \theta_3 \left(\frac{d^3 v_g}{dt^3} + \frac{\omega_o}{Q} \frac{d^2 v_g}{dt^2} + \omega_p^2 \frac{dv_g}{dt} \right) \end{aligned}$$

Soulignons ici que cette forme permet d'étudier la réponse du résonateur quelle que soit la forme de la tension d'excitation $v_g(t)$, contrairement à la méthode des impédances qui ne donne la réponse qu'en régime harmonique.

4.2.3 - Réponse du résonateur à une excitation harmonique

Si $v_g(t)$ est un générateur harmonique de fréquence variable ω et d'amplitude constante V_g :

$$(4.10) \quad v_g(t) = V_g \cos \omega t$$

nous obtiendrons la réponse en amplitude et en phase du résonateur en cherchant une solution de l'équation (4.9) sous la forme :

$$(4.11) \quad v(t) = V \cos(\omega t + \phi)$$

V étant l'amplitude du signal de sortie et ϕ le déphasage entre les signaux d'entrée et de sortie.

En reportant les dérivées successives de v et de v_g dans (4.9) nous obtenons :

$$(4.12) \quad \begin{aligned} & V(\omega^3 \theta - \omega(\frac{\omega_o}{Q} + \theta \omega_p^2)) \sin(\omega t + \phi) + V(\omega_o^2 - \omega^2(1 + \frac{\omega_o \theta}{Q})) \cos(\omega t + \phi) \\ & = \theta_3 V_g (\omega^3 - \omega \omega_p^2) \sin \omega t - \theta_3 V_g \frac{\omega_o}{Q} \omega^2 \cos \omega t. \end{aligned}$$

Cette relation devant être vérifiée quel que soit t , nous pouvons identifier les termes en $\sin \omega t$ et $\cos \omega t$ de chacun des membres de (4.12). Après avoir développé les $\sin(\omega t + \phi)$ et $\cos(\omega t + \phi)$, nous obtenons un système du type :

$$(4.13) \quad \begin{cases} \alpha \sin \phi + \beta \cos \phi = \gamma \\ -\beta \sin \phi + \alpha \cos \phi = \delta \end{cases}$$

avec :

$$(4.14) \quad \begin{cases} \alpha = V \left(\omega^3 \theta - \omega \left(\frac{\omega_0}{Q} + \theta \omega_p^2 \right) \right) \\ \beta = V \left(\omega_0^2 - \omega^2 \left(1 + \frac{\omega_0 \theta}{Q} \right) \right) \\ \gamma = -\theta_3 V_g \frac{\omega_0}{Q} \omega^2 \\ \delta = \theta_3 V_g (\omega^3 - \omega \omega_p^2) \end{cases}$$

a) - Réponse en amplitude :

Les relations (4.13) permettent d'obtenir $\sin \phi$ et $\cos \phi$:

$$(4.15) \quad \begin{cases} \sin \phi = \frac{\gamma \alpha - \delta \beta}{\alpha^2 + \beta^2} \\ \cos \phi = \frac{\gamma \beta + \delta \alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases}$$

En écrivant $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$, nous obtenons alors :

$$(4.16) \quad \gamma^2 + \delta^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

expression qui permet d'exprimer l'amplitude V en utilisant les relations (4.14).

Pour donner une forme plus concise à cette relation, nous utiliserons les pulsations réduites définies par :

$$(4.17) \quad u = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad u_p = \frac{\omega_p}{\omega_0}$$

Le rapport entre les tensions de sortie et d'entrée prend alors la forme suivante :

$$(4.18) \quad \frac{V^2}{V_g^2} = \theta_3^2 \omega_0^2 \frac{u^2 \left(\frac{u^2}{Q^2} + (u^2 - u_p^2)^2 \right)}{u^2 \left(\omega_0 \theta (u^2 - u_p^2) - \frac{1}{Q} \right)^2 + \left(1 - u^2 \left(\frac{\omega_0 \theta}{Q} + 1 \right) \right)^2}$$

La figure (4.4) montre les courbes de réponse en amplitude tracées pour différentes valeurs de la capacité parallèle C_0 en fonction de l'écart entre la fréquence d'excitation et f_0 :

$$\Delta f = f - f_0 = f_0 (u - 1)$$

Le résonateur représenté a les caractéristiques suivantes :

$$(4.19) \quad \begin{aligned} f_0 &= 5 \text{ MHz} , \quad Q = 3 \cdot 10^6 , \\ L_1 &= 10 \text{ H} , \quad C_1 = 10^{-4} \text{ pF} , \quad R_1 = 106 \Omega , \text{ en outre, nous} \\ &\text{avons donné à } C_0 \text{ les différentes valeurs 3, 10 et 30 pF.} \end{aligned}$$

b) - Réponse en phase :

En effectuant le rapport des deux relations (4.15), nous obtenons immédiatement l'expression du déphasage :

$$(4.20) \quad \phi = \text{Arc tg } \frac{\gamma\alpha - \delta\beta}{\gamma\beta + \delta\alpha}$$

En revenant aux définitions (4.14) et (4.17), il reste après quelques simplifications :

$$(4.21) \quad \phi = \text{Arc tg } \frac{(u^2 - 1) (u^2 - u_p^2) + \frac{u^2}{Q^2}}{\omega_0 \theta_u \left((u^2 - u_p^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2} \right) + \frac{u}{Q} (u_p^2 - 1)}$$

La figure 4.5 représente les courbes de réponse en phase correspondant aux différents cas de la figure 4.4.

Les relations (4.4) permettent d'exprimer ω_p en fonction de ω_0 et du rapport C_1/C_0 , en effet :

$$(4.22) \quad \omega_p^2 = \omega_0^2 + \omega_d^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{C_1}{C_0} \right) \quad \text{soit : } u_p^2 = 1 + \frac{C_1}{C_0}$$

Généralement $C_1/C_0 \ll 1$ (cf. valeurs numériques (4.19)), nous pouvons alors écrire :

$$(4.23) \quad \omega_p \approx \omega_0 \left(1 + \frac{C_1}{2C_0} \right)$$

Si nous appelons ω_Δ la différence entre les fréquences de résonance série et parallèle, nous aurons :

$$(4.24) \quad \omega_\Delta = \omega_p - \omega_0 = \frac{\omega_0 C_1}{2C_0}$$

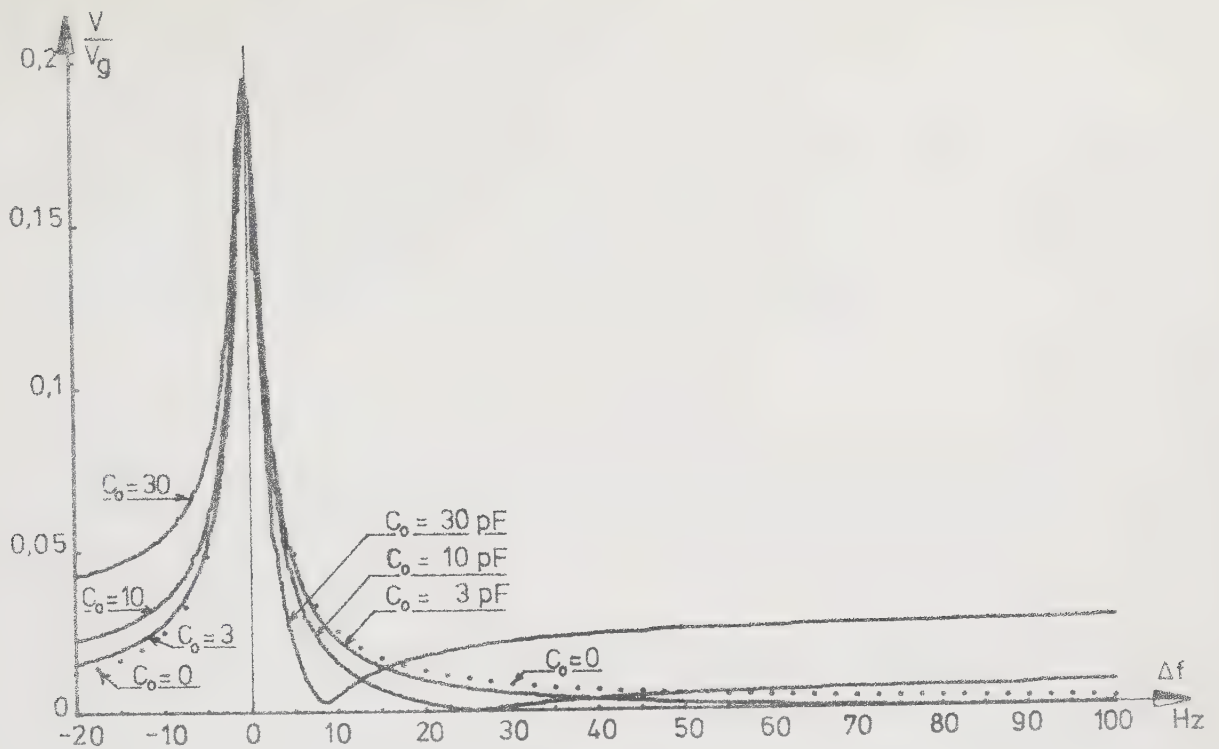


Figure 4.4 Réponse en amplitude

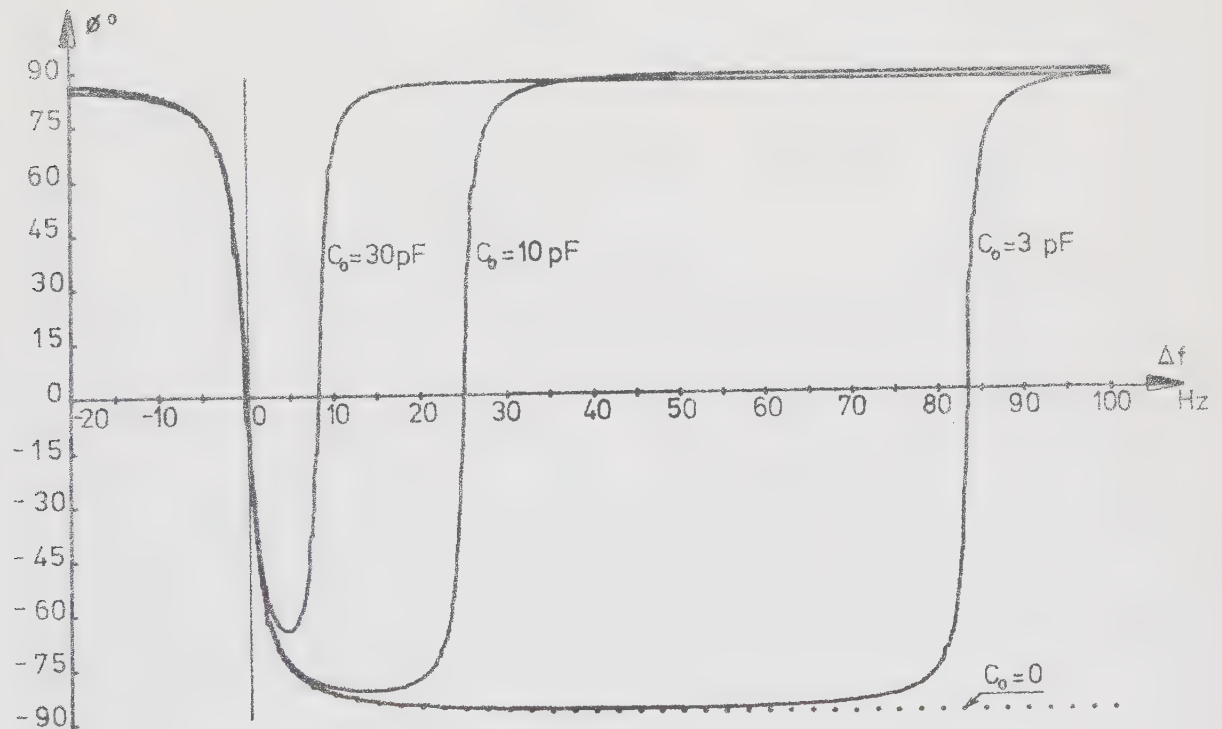


Figure 4.5 Réponse en phase

Réponses en amplitude et phase d'un résonateur montrant l'influence de la capacité parallèle.

Caractéristiques du résonateur et du montage :

$f_o = 5 \text{ MHz}$	$Q = 3 \cdot 10^6$	$R_3 = 32 \ \Omega$
$C_1 = 10^{-4} \text{ pF}$	$R_1 = 106 \ \Omega$	$\Delta f = f_o(u-1)$
$L_1 = 10 \text{ H}$	$R_2 = 28 \ \Omega$	

Pour un oscillateur à 5 MHz d'utilisation courante, la différence entre les fréquences de résonance série et parallèle est généralement de l'ordre d'une centaine de hertz, pour les oscillateurs à 100 MHz cette différence est de l'ordre d'une dizaine de kilohertz.

4.3 - DETERMINATION DES FREQUENCES CARACTERISTIQUES DU RESONATEUR

4.3.1 - Définitions

Les fréquences caractéristiques sont au nombre de 9 (33). Nous ne nous intéresserons qu'à quelques unes d'entre elles. Ces fréquences peuvent être calculées soit par la méthode des impédances (34) soit à partir de l'expression de la réponse du résonateur. C'est cette dernière méthode que nous utiliserons.

Les relations (4.4) donnent l'expression des deux premières fréquences caractéristiques ω_o et ω_p . Parmi les autres, nous distinguons les fréquences suivantes :

ω_M : fréquence correspondant à l'amplitude maximale du signal de sortie.

ω_m : correspondant à l'amplitude minimale.

ω_r : correspondant à un déphasage nul entre signaux de sortie et d'entrée, au voisinage de ω_o .

ω_a : correspondant à un déphasage nul au voisinage de ω_p .

Lorsque $C_o = 0$, ω_p , ω_m et ω_a sont rejetées à l'infini et $\omega_M = \omega_r = \omega_o$.

Pour $C_o \neq 0$, il reste que ω_p , ω_m et ω_a d'une part, ω_M , ω_r et ω_o d'autre part sont des quantités très voisines.

4.3.2 - Fréquences correspondant au déphasage nul

Parmi les différentes fréquences énumérées précédemment, c'est ω_r qui est la plus importante car c'est celle qui définit en première approximation, la fréquence à laquelle oscillera le dispositif tel qu'il a été décrit au § 1.5.1. Cette fréquence, ainsi que ω_a est obtenue en re-

cherchant les valeurs de u qui annulent ϕ dans la relation (4.21). Nous recherchons donc les valeurs de u pour lesquelles :

$$(4.25) \quad (u^2 - 1) (u^2 - u_p^2) + \frac{u^2}{Q^2} = 0$$

a) - Détermination de ω_r :

ω_r étant proche de ω_o , la valeur $u_r^2 = \frac{\omega_r^2}{\omega_o^2}$ sera voisine de l'unité, nous poserons donc :

$u_r^2 = 1 + \epsilon$, la relation (4.25) devient alors :

$$(4.26) \quad \epsilon(1 + \epsilon - u_p^2) + \frac{1 + \epsilon}{Q^2} \approx -\epsilon(1 - u_p^2) + \frac{1}{Q^2}$$

en négligeant les termes en ϵ^2 et ϵ/Q devant 1, d'où la valeur de ϵ :

$$(4.27) \quad \epsilon = \frac{1}{Q^2 (u_p^2 - 1)} = \frac{C_o R_1^2}{L_1}$$

compte tenu des relations (4.4) et (4.22), ω_r^2 s'exprime alors sous la forme :

$$(4.28) \quad \omega_r^2 = \omega_o^2 \left(1 + \frac{C_o R_1^2}{L_1}\right)$$

comme $\frac{C_o R_1^2}{L_1} \ll 1$, nous pouvons écrire :

$$(4.29) \quad \omega_r \approx \omega_o \left(1 + \frac{C_o R_1^2}{2L_1}\right)$$

b) - Détermination de ω_a :

De façon analogue au cas précédent, nous cherchons la valeur $u_a^2 = \omega_a^2/\omega_o^2$ voisine de u_p^2 qui annule (4.25). En posant $u_a^2 = u_p^2 + \epsilon'$, nous obtenons :

$$(4.30) \quad (u_p^2 + \epsilon' - 1)\epsilon' + \frac{u_p^2 + \epsilon'}{Q^2} \approx (u_p^2 - 1)\epsilon' + \frac{u_p^2}{Q^2}$$

soit :

$$(4.31) \quad \epsilon' = \frac{u_p^2}{Q^2(1 - u_p^2)} = -\frac{\omega_p^2}{\omega_o^2} \frac{C_o R_1^2}{L_1}$$

ω_a^2 s'écrit par conséquent :

$$(4.32) \quad \omega_a^2 = \omega_p^2 \left(1 - \frac{C_o R_1^2}{L_1}\right) \rightarrow \omega_a \approx \omega_p \left(1 - \frac{C_o R_1^2}{2L_1}\right)$$

4.3.3 - Fréquences correspondant à une amplitude extrémale

Pour déterminer les valeurs de ω pour lesquelles la réponse en amplitude est extrémale, il faut rechercher les valeurs de u qui annulent la dérivée de (4.18). La variable u n'intervenant que par son carré dans cette expression, le problème revient à déterminer les valeurs de u^2 qui annulent la dérivée de la fonction :

$$(4.33) \quad y = \frac{V^2}{\omega_o^2 \theta^2 V_g^2} \quad \text{cf. (4.18)}$$

La dérivée de y sera nulle si le numérateur de dy/du^2 est nul, ce numérateur a pour expression (cf. annexe 4.1) :

$$(4.34) \quad (u_p^2 - u^2)(u_p^2 - 1) \left[(u_p^2 - u^2)(u^2 - 1) - 2u^2(u_p^2 - 1) \right] - \frac{4\omega_o \theta}{Q} u^4 (u_p^2 - u^2)(u_p^2 - 1) - \frac{2u^4}{Q^2} (u_p^2 - u^2) - \frac{2u^2}{Q^2} (u^2 - 1) = 0$$

Dans cette expression les termes tels que $\frac{\omega_o^2 \theta^2}{Q^2}$, $\frac{1}{Q^3}$, $\frac{\omega_o \theta}{Q^3}$ ont été négligés.

a) - Détermination de ω_M :

Comme précédemment, ω_M étant proche de ω_o , nous poserons $\omega_M^2/\omega_o^2 = u_M^2 = 1 + \epsilon$. Après avoir reporté cette valeur dans (4.34) et négligé les termes en ϵ^2 , ϵ/Q^2 et $\omega_o \theta \epsilon / Q$, nous obtenons :

$$(4.35) \quad 2\epsilon(u_p^2 - 1) + \frac{4\omega_o \theta}{Q} (u_p^2 - 1) + \frac{2}{Q^2} = 0$$

d'où l'on déduit la valeur de ϵ (cf. (4.4) et (4.22)) :

$$(4.36) \quad \epsilon = \frac{-1}{Q^2(u_p^2 - 1)} - \frac{2\omega_o \theta}{Q} = -\frac{C_o R_1}{L_1} (R_1 + 2R_2 + 2R_3)$$

ω_M^2 est donc donné par :

$$(4.37) \quad \omega_M^2 = \omega_o^2 \left(1 - \frac{C_o R_1}{L_1} (R_1 + 2R_2 + 2R_3) \right) \rightarrow \omega_M \approx \omega_o \left(1 - \frac{C_o R_1}{2L_1} (R_1 + 2R_2 + 2R_3) \right)$$

b) - Détermination de ω_m :

ω_m étant voisin de ω_p , nous pouvons poser : $\omega_m^2/\omega_o^2 = u_m^2 = u_p^2 + \epsilon'$, avec les mêmes approximations que précédemment, (4.34) nous donne :

$$(4.38) \quad \epsilon' = \frac{1}{Q^2(u^2 - 1)} = \frac{C_o R_1^2}{L_1} \quad \text{cf. (4.27)}$$

d'où :

$$(4.39) \quad \omega_m^2 = \omega_p^2 + \frac{C_o R_1^2 \omega_o^2}{L_1} \approx \omega_p^2 \left(1 + \frac{C_o R_1^2}{L_1}\right) \rightarrow \omega_m \approx \omega_p \left(1 + \frac{C_o R_1^2}{2L_1}\right)$$

Remarque :

Nous constatons que la fréquence correspondant à une réponse maximale est différente de la fréquence pour laquelle le déphasage est nul, ces deux fréquences étant situées de part et d'autre de ω_o (cf. figure 4.6). De même la fréquence pour laquelle la réponse est minimale est différente de celle qui correspond au second déphasage nul, ces fréquences sont situées de part et d'autre de ω_p .

La distance séparant ω_r et ω_M vaut :

$$\omega_r - \omega_M = \omega_o \frac{C_o R_1}{L_1} (R_1 + R_2 + R_3)$$

celle qui sépare ω_m de ω_a est :

$$\omega_m - \omega_a = \omega_p \frac{C_o R_1^2}{L_1}$$

ces écarts étant de l'ordre du dixième de hertz pour un quartz à 5 MHz partiel 5.

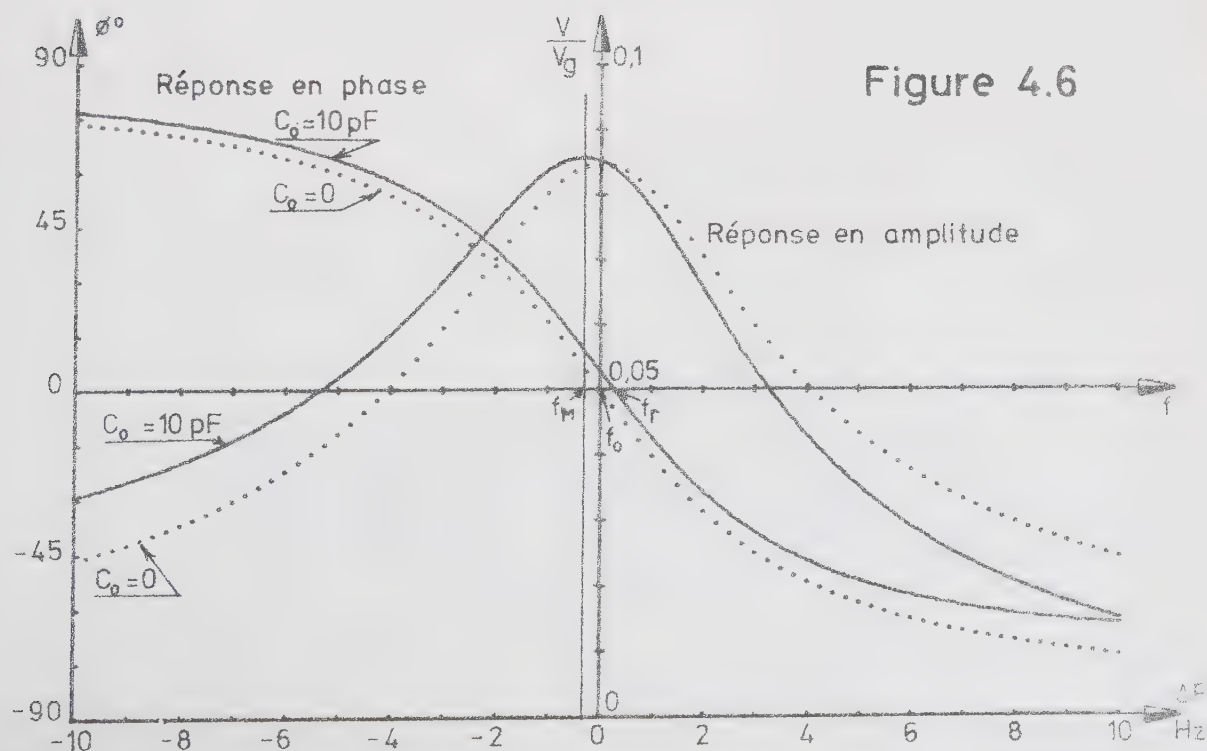


Figure 4.6

CHAPITRE 5

ETUDE DE L'AUTOOSCILLATEUR

Ce chapitre décrit la mise en équation de l'oscillateur ainsi que l'explication de la forme mathématique finale sous laquelle le mouvement sera étudié. Il est également montré comment s'introduisent les différents termes de perturbation dans l'équation. On justifiera enfin le modèle de perturbation choisi dans cette étude.

5.1 - L'OSCILLATEUR NON PERTUPBE5.1.1 - Equation différentielle de fonctionnement

Au cours du premier chapitre nous avons établi le schéma équivalent de l'oscillateur que nous étudions (cf. § 1.5, figure 1.5). Ce schéma est rappelé sur la figure 5.1 sur lequel nous avons remplacé le quartz par son circuit équivalent.

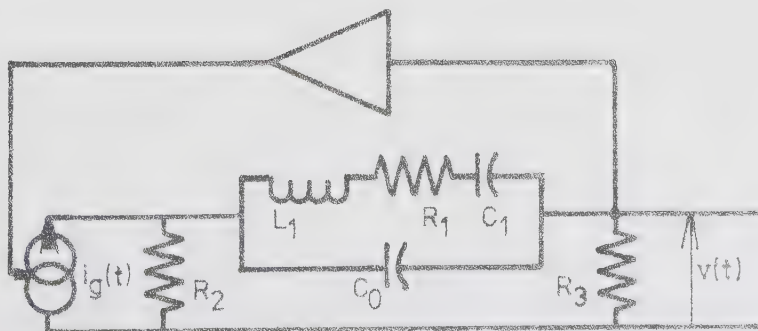


Figure 5.1

L'équation différentielle de fonctionnement, comme nous l'avons précisé au § 1.6 est obtenue à partir de la relation (1.10) ou, ce qui est la même chose, à partir de (4.6) ou (4.9) dans lesquelles :

$v_g(t) = R_2 i_g(t)$ cf. § 4.2.2. et $i_g(t) = f(v)$. Cette équation s'écrit :

$$(5.1) \quad \theta \frac{d^3 v}{dt^3} + \left(1 + \frac{\omega_o \theta}{Q}\right) \frac{d^2 v}{dt^2} + \left(\frac{\omega_o}{Q} + \theta \omega_p^2\right) \frac{dv}{dt} + \omega_o^2 v = R_2 \theta_3 \left(\frac{d^3 i_g}{dt^3} + \frac{\omega_o}{Q} \frac{d^2 i_g}{dt^2} + \omega_p^2 \frac{di_g}{dt}\right)$$

En utilisant les relations de dérivations successives, nous avons :

$$(5.2) \quad \begin{cases} \frac{di_g}{dt} = f'(v) \dot{v} & \text{avec } f'(v) = \frac{df(v)}{dv} \text{ et } \dot{v} = \frac{dv}{dt} \dots \\ \frac{d^2 i_g}{dt^2} = f''(v) \dot{v}^2 + f'(v) \ddot{v} \\ \frac{d^3 i_g}{dt^3} = f'''(v) \dot{v}^3 + 3f''(v) \ddot{v} \dot{v} + f'(v) \dddot{v} \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire (5.1) sous la forme :

$$(5.3) \quad \begin{aligned} & \left(\theta - R_2 \theta_3 f'(v)\right) \dddot{v} + \left(1 + \frac{\omega_o \theta}{Q} - 3R_2 \theta_3 \dot{v} f''(v) - \frac{\omega_o}{Q} R_2 \theta_3 f'(v)\right) \ddot{v} \\ & + \left(\frac{\omega_o}{Q} + \theta \omega_p^2 - R_2 \theta_3 \dot{v}^2 f'''(v) - \frac{\omega_o}{Q} R_2 \theta_3 \dot{v} f''(v) - \omega_p^2 R_2 \theta_3 f'(v)\right) \dot{v} + \omega_o^2 v = 0 \end{aligned}$$

5.1.2 - Caractéristique de l'amplificateur

Nous avons expliqué au § 1.5.3 les raisons pour lesquelles la caractéristique de l'amplificateur est établie sous forme d'un développement analytique (relation (1.9)) :

$$(5.4) \quad i_g = g_o v - \beta v^3$$

Pour l'étude qui nous préoccupe, nous nous limiterons à un développement au troisième ordre dont les coefficients sont déterminés à

partir de la transconductance effective expérimentale * (cf. (1.8)). Cette transconductance expérimentale a été tracée pour un amplificateur de bouclage couramment utilisé (figure 5.2.a). Elle permet de déterminer les coefficients de la transconductance théorique :

$$(5.5) \quad g_m = g_o - \frac{3 \beta v_m^2}{4} \quad \text{cf. figure 5.2.b.}$$

où v_m désigne l'amplitude du signal qui a permis de tracer la courbe expérimentale. La forme de cette courbe montre que le terme du troisième ordre de (1.8) est négatif, c'est la raison pour laquelle nous avons utilisé le signe moins dans (5.4) et (5.5) de façon à garder β positif.

Dans le paragraphe 1.5.2 nous avons montré que la courbe de transconductance permet de déterminer l'amplitude v_o du signal de sortie de l'oscillateur en cherchant l'intersection de $g_m(v_m)$ et de :

$$(5.6) \quad g_Q = \frac{R_2 + R_3 + R_1}{R_2 R_3}$$

en utilisant (5.5) nous obtenons :

$$(5.7) \quad g_o - \frac{3 \beta v_o^2}{4} = g_Q$$

d'où :

$$(5.8) \quad v_o^2 = \frac{4 (g_o - g_Q)}{3\beta}$$

Pour l'oscillateur considéré nous avons déterminé les paramètres suivants :

$$\begin{array}{ll} g_o = 210 \text{ mmhos} & g_Q = 170 \text{ mmhos} \\ \beta = 1,48 \text{ mmhos/mV}^2 & v_o = 6 \text{ mV} \end{array}$$

5.1.3 - Mise en forme de l'équation différentielle

Connaissant l'expression analytique de la caractéristique, nous pouvons maintenant poursuivre l'étude de l'équation (5.3). Remplaçons dans cette équation $f(v)$ et ses dérivées successives par les expressions suivantes :

* Pour une analyse plus fine, il faudrait utiliser un développement plus complet, le calcul est un peu plus compliqué mais la méthode reste la même.

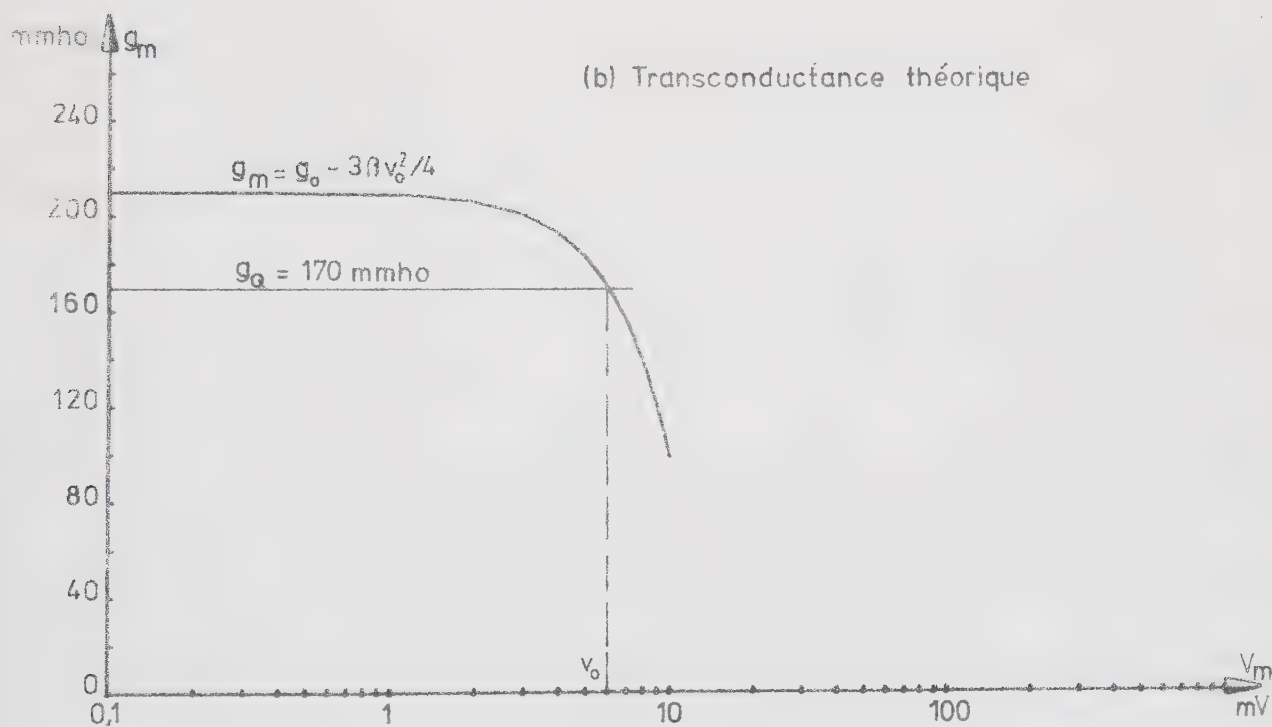
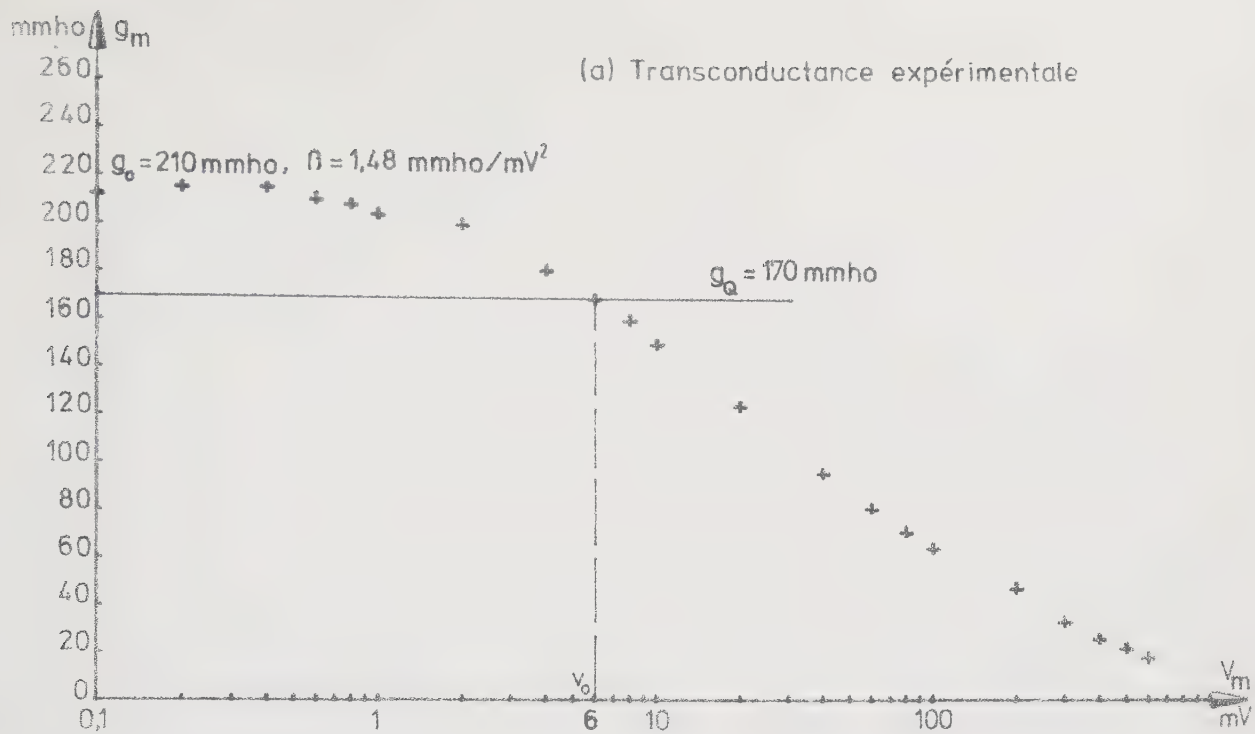


Figure 5.2 : Transconductance de l'amplificateur de bouclage.

La transconductance théorique est tracée à partir des coefficients déterminés sur la transconductance expérimentale.

$$(5.9) \quad \begin{cases} f(v) = g_0 v - \beta v^3 \\ f'(v) = g_0 - 3\beta v^2 \\ f''(v) = -6\beta v \\ f'''(v) = -6\beta \end{cases}$$

ce qui donne :

$$(5.10) \quad \begin{aligned} & (\theta - R_{23} \theta_3 (g_0 - 3\beta v^2)) \ddot{v} + \left(1 + \frac{\omega_0 \theta}{Q} + 18\beta R_{23} \theta_3 \dot{v} v - \frac{\omega_0}{Q} R_{23} \theta_3 (g_0 - 3\beta v^2)\right) \dot{v} \\ & + \left(\frac{\omega_0}{Q} + \theta \omega_p^2 + 6\beta R_{23} \theta_3 \dot{v}^2 + 6\beta \frac{\omega_0}{Q} R_{23} \theta_3 \dot{v} v - \omega_p^2 R_{23} \theta_3 (g_0 - 3\beta v^2)\right) v + \omega_0^2 v = 0 \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une équation différentielle non linéaire du troisième ordre. Dans le cas général, on ne sait pas résoudre analytiquement ce type d'équation mais nous allons montrer que l'équation particulière (5.10) peut se ramener, grâce à l'ordre de grandeur des différents termes, à une équation du second ordre affectée par une faible perturbation. Nous pourrions alors utiliser, en les généralisant quelque peu, les méthodes de résolution approchée des systèmes différentiels à petit paramètre. Ces méthodes seront présentées dans la seconde partie mais d'ores et déjà nous pouvons préciser que pour les utiliser, il est préférable d'avoir affaire à des grandeurs sans dimensions. A cette fin, nous définirons la variable réduite :

$$(5.11) \quad x(t) = \frac{v(t)}{v_0} \quad \text{où } v_0 \text{ est l'amplitude du signal en régime permanent définie par (5.8)}$$

(cf. également figure 5.2). L'amplitude a_0 de la variable $x(t)$ vaudra donc 1 en régime permanent.

Si l'on garde présent à l'esprit que nous étudions un oscillateur sinusoïdal de bonne qualité, nous sommes en droit d'espérer que la variable $x(t)$ est une fonction quasi sinusoïdale et de ce fait, elle peut être considérée comme la solution d'une équation différentielle du second ordre avec un second membre, contenant bien entendu les termes du troisième ordre, mais qui n'intervient que comme une perturbation faible.

Nous allons préciser cette idée et nous justifierons a posteriori l'hypothèse que nous venons d'exposer.

L'équation (5.10) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} + \omega_0^2 x &= -(\theta - R_2 \theta_3 (g_0 - 3\beta v_0^2 x^2)) \ddot{x} \\
 (5.12) \quad & - \left(\frac{\omega_0 \theta}{Q} + 16\beta v_0^2 R_2 \theta_3 \dot{x} - \frac{\omega_0}{Q} R_2 \theta_3 (g_0 - 3\beta v_0^2 x^2) \right) \ddot{x} \\
 & - \left(\frac{\omega_0}{Q} + \theta \omega_p^2 + 6\beta v_0^2 R_2 \theta_3 \dot{x}^2 + 6\beta v_0^2 \frac{\omega_0}{Q} R_2 \theta_3 \dot{x} - \omega_p^2 R_2 \theta_3 (g_0 - 3\beta v_0^2 x^2) \right) \dot{x}
 \end{aligned}$$

De façon à mieux faire apparaître le rôle de la capacité parallèle C_0 et à pouvoir comparer avec le cas où elle est nulle, nous allons séparer dans l'équation (5.12) les termes qui dépendent de C_0 de ceux qui n'en dépendent pas. Pour cela, nous utiliserons les définitions (4.4.b) et (4.8) que nous rappelons ici :

$$\omega_p^2 = \omega_0^2 + \omega_d^2 \quad \text{avec} \quad \omega_d^2 = \omega_0^2 \frac{C_1}{C_0}$$

$\theta = C_0 (R_2 + R_3)$, $\theta_3 = C_0 R_3$ et qui montrent que les produits $\omega_d^2 \theta$ et $\omega_d^2 \theta_3$ sont indépendants de C_0 .

L'équation (5.12) prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} + \omega_0^2 x &= - \left[\frac{\omega_0}{Q} + \omega_d^2 (\theta - R_2 \theta_3 (g_0 - 3\beta v_0^2 x^2)) \right] \dot{x} \\
 (5.13) \quad & - \frac{\omega_0}{Q} \left[(\theta - R_2 \theta_3 (g_0 - 3\beta v_0^2 x^2)) \ddot{x} + 6\beta v_0^2 R_2 \theta_3 x \dot{x}^2 \right] \\
 & - \left[(\theta - R_2 \theta_3 (g_0 - 3\beta v_0^2 x^2)) (\ddot{x} + \omega_0^2 x) + 6\beta v_0^2 R_2 \theta_3 \dot{x} (3x\ddot{x} + \dot{x}^2) \right]
 \end{aligned}$$

Le second membre de cette équation est constitué de trois termes : le premier indépendant de C_0 , le second, contenant C_0/Q en facteur, est d'un ordre de grandeur différent du troisième où seul C_0 est en facteur. Lorsque C_0 est nul, le second membre de (5.13) se réduit donc au premier terme.

5.1.4 - Forme réduite

La forme réduite de l'équation (5.13) a pour but de revenir aux paramètres du schéma équivalent et de faire apparaître dans le second membre des termes ayant sensiblement le même ordre de grandeur que ceux du premier membre, affectés d'un coefficient sans dimension, généralement petit devant 1 ; ce coefficient sert de "mesure" pour estimer l'ordre de grandeur des termes intervenant dans l'équation.

Cette mise en forme, un peu laborieuse, ne présente pas de difficulté (cf. annexe 5.1), elle utilise les définitions (4.4) et (4.8) et fait apparaître la transconductance du circuit de réaction g_Q (cf. (5.6)). De plus, v_0 a été remplacé par son expression (5.8).

Les petits paramètres sans dimension intervenant dans la forme réduite sont les suivants :

$$(5.14) \quad \begin{cases} \lambda = \omega_0 C_1 R_2 R_3 (g_0 - g_Q) \\ \epsilon = \omega_0^2 C_0 C_1 R_1 R_2 R_3 (g_0 - g_Q) \\ \mu = \omega_0 C_0 R_2 R_3 (g_0 - g_Q) \end{cases}$$

En outre, nous avons posé :

$$(5.15) \quad \gamma = 1 + \frac{R_1}{R_2 R_3 (g_0 - g_Q)}$$

Rappelons ici que :

$$g_Q = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_2 R_3} \quad \text{et que} \quad v_0^2 = \frac{4(g_0 - g_Q)}{3\beta} \quad \text{cf. (5.6) \& (5.8)}$$

Dans ces conditions, l'équation (5.13) peut s'écrire :

$$(5.16) \quad \begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x &= \lambda (1 - 4x^2) \omega_0 \dot{x} + \epsilon \left((\gamma - 4x^2) \ddot{x} - 8x \dot{x}^2 \right) \\ &+ \mu \left((\gamma - 4x^2) \left(\frac{\ddot{x}}{\omega_0} + \omega_0 \dot{x} \right) - 8 \frac{\dot{x}}{\omega_0} (3x \ddot{x} + \dot{x}^2) \right) \end{aligned}$$

Pour un oscillateur du type que nous étudions et dont les caractéristiques ont été données précédemment, nous obtenons les valeurs numériques suivantes pour les différents paramètres :

$\lambda \approx 10^{-7}$, $\epsilon \approx 10^{-9}$, $\mu \approx 10^{-3}$, le coefficient γ étant de l'ordre de grandeur de l'unité.

Ces résultats justifient par conséquent l'hypothèse qui nous a amené à mettre l'équation différentielle (5.10) sous la forme (5.12) puis (5.16). Nous verrons plus loin que les "petits paramètres" λ , ϵ et μ jouent un rôle fondamental dans l'étude des équations différentielles du type de celle que nous avons obtenue ; notamment, la forme même de l'équation (5.16) montre qu'en première approximation on pourra utiliser le principe de superposition des petites perturbations, ce qui facilitera la résolution.

Remarques:

- Il semblerait a priori que les termes en λ et ϵ soient négligeables devant le terme en μ , cependant lorsque nous approfondirons ce point, nous verrons qu'il est indispensable de conserver les trois termes du second membre de (5.16).

- Lorsque la capacité parallèle est nulle, les paramètres ϵ et μ sont nuls tous les deux (cf. (5.14)) l'équation (5.16) se réduit alors à une équation classique du type Van der Pol (35).

Avant d'aborder l'étude de l'équation obtenue, nous allons montrer comment peuvent s'introduire dans l'équation (5.16) les perturbations de l'oscillateur telles qu'elles ont été décrites au § 2.3 et présenter l'étude que nous nous proposons de poursuivre.

5.2 - L'AUTOOSCILLATEUR PERTURBE

Nous avons exposé au § 3.4.3, comment un oscillateur perturbé pouvait être étudié à l'aide d'un générateur harmonique de fréquence variable. C'est cette méthode que nous utiliserons pour étudier l'influence du bruit additif interne représenté sur la figure 2.5 par les sources A_1 et A_2 . Ces perturbations étant faibles, nous pourrons, comme pour l'autooscillateur, obtenir l'effet total en superposant l'effet de chaque source prise séparément.

Si nous reprenons le schéma équivalent de l'oscillateur (figure 5.1) les sources de bruit A_1 et A_2 peuvent être représentées par quatre générateurs : $i_e(t)$, $i_s(t)$, $v_e(t)$, $v_s(t)$, figure 5.3.

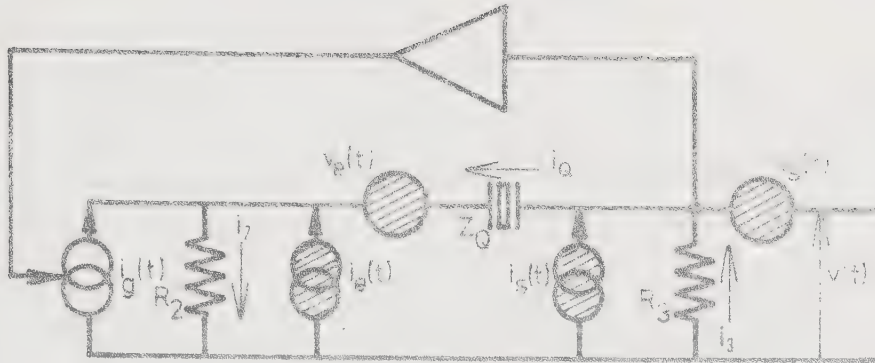


Figure 5.3

Nous verrons que le problème de ces quatre sources se ramène à l'étude de deux cas seulement :

5.2.1 - Modulation à l'entrée

Nous avons appelé ainsi l'effet des sources $i_e(t)$ et $v_e(t)$. Si ces deux sources agissent seules ($v_s(t) = 0$, $i_s(t) = 0$), l'analyse du circuit montre que :

$$(5.17) \quad \begin{cases} v = -R_3 i_3 = Z_Q i_Q + v_e + R_2 i_2 \\ i_Q = i_3 \quad \text{et} \quad i_2 = i_g + i_e + i_Q \end{cases}, \text{ avec :}$$

Ce qui donne en notation de Laplace :

$$(5.18) \quad (R_2 + R_3 + Z_Q(p)) v(p) = R_2 R_3 i_g(p) + R_2 R_3 i_e(p) + R_3 v_e(p)$$

Nous constatons immédiatement sur cette expression que les tensions de bruit $R_2 i_e$ et v_e jouent le même rôle, c'est pourquoi nous n'étudierons que l'effet du courant i_e de façon à ne pas alourdir inutile-

ment les expressions. L'effet de v_e sera simplement obtenu en substituant dans le résultat $R_2 i_e$ par v_e , par conséquent :

$$(5.19) \quad (R_2 + R_3 + Z_Q(p)) v(p) = R_2 R_3 (i_g(p) + i_e(p))$$

L'effet de la source i_e sera obtenu simplement en remplaçant dans l'équation (5.1) le courant i_g par la somme $i_g + i_e$, ce qui aura pour effet d'ajouter un second membre à l'équation (5.3). Ce terme de perturbation que nous appellerons $h_e(R_2 i_e, t)$ a pour expression :

$$(5.20) \quad h_e(R_2 i_e, t) = R_2 R_3 \left(\frac{d^3 i_e}{dt^3} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d^2 i_e}{dt^2} + \omega_p^2 \frac{d i_e}{dt} \right)$$

Comme nous l'avons rappelé au début de ce paragraphe 5.2 la source de courant i_e est un générateur harmonique ; puisque seules les composantes spectrales voisines de la porteuse de la source réelle de bruit ont une influence sur le signal de sortie, nous pourrions considérer que $i_e(t)$ est de la forme :

$$(5.21) \quad i_e(t) = I_e \cos \omega_e t \quad \text{avec} \quad \omega_e = \omega_0 \pm \Omega_e \quad \Omega_e = 2\pi F_e \ll \omega_0$$

I_e pourrait représenter l'amplitude des composantes de Fourier du bruit réel et F_e la différence entre la fréquence de la composante étudiée et celle de l'oscillateur comme cela a été expliqué au § 3.4.3. Le signe $\pm$ indique seulement la position de la composante de bruit par rapport à la porteuse. Pour employer comme précédemment des quantités sans dimension, nous utiliserons la fonction réduite $h_e(\omega_e, t)$ qui s'écrit à présent :

$$(5.22) \quad h_e(\omega_e, t) = R_2 R_3 \frac{I_e}{V_0} \left(\omega_e^3 \sin \omega_e t - \frac{\omega_0}{Q} \omega_e^2 \cos \omega_e t - \omega_p^2 \omega_e \sin \omega_e t \right)$$

Pour faire apparaître le petit paramètre sans dimension indispensable et séparer les termes qui dépendent de C_0 , nous allons mettre ω_0 en facteur et revenir aux paramètres du circuit :

$$(5.23) \quad h_e(\omega_e, t) = -\omega_0 C_1 R_2 R_3 \frac{I_e}{V_0} \omega_0 \omega_e \sin \omega_e t + \omega_0 C_0 R_2 R_3 \frac{I_e}{V_0} \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} (\omega_e^2 - \omega_0^2) \sin \omega_e t - \frac{\omega_e^2}{Q} \cos \omega_e t \right)$$

Cette fonction $h_e(\omega_e, t)$ s'ajoute simplement aux trois termes du second membre de (5.13). Les petits paramètres, caractéristiques de la perturbation faible sont ici :

$$(5.24) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \omega_0 C_1 R_2 R_3 \frac{I_e}{V_0} \\ \sigma_0 = \omega_0 C_0 R_2 R_3 \frac{I_e}{V_0} \end{cases}$$

Ce sont des fonctions de l'amplitude I_e des composantes de bruit, ces composantes devront donc être telles que $\sigma_1 \ll 1$ et $\sigma_0 \ll 1$ ce qui est toujours vérifié dans la pratique ; par exemple, si la source est constituée par la tension de bruit de la résistance $R_2 \approx 50 \Omega$ qui est de l'ordre de 1 nV/Hz nous obtenons $\sigma_0 \approx 10^{-9}$ et $\sigma_1 \approx 10^{-13}$.

La fonction $h_e(\omega_e, t)$ prend maintenant la forme réduite :

$$(5.25) \quad h_e(\omega_e, t) = -\sigma_1 \omega_0 \omega_e \sin \omega_e t + \sigma_0 \left(\frac{\omega_e}{\omega_0} (\omega_e^2 - \omega_0^2) \sin \omega_e t - \frac{\omega_e^2}{Q} \cos \omega_e t \right)$$

et s'ajoute au second membre de (5.16) au même titre que les termes en λ , ϵ et μ .

5.2.2 - Modulation à la sortie

Elle est caractérisée par les sources $i_s(t)$ et $v_s(t)$. Lorsque ces deux sources agissent seules ($v_e(t) = 0$, $i_e(t) = 0$) nous obtenons les relations suivantes (cf. figure 5.3) :

$$(5.26) \quad \begin{cases} v = v_s - R_3 i_3 = Z_Q i_Q + R_2 i_2 \\ \text{avec } i_Q = i_3 + i_s \quad \text{et} \quad i_2 = i_g + i_Q \end{cases}$$

d'où l'équation en notation de Laplace :

$$(5.27) \quad (R_2 + R_3 + Z_Q(p))v(p) = R_2 R_3 i_g(p) + R_2 R_3 i_s(p) + R_3 Z_Q i_s(p) + R_2 v_s(p) + Z_Q v_s(p)$$

Comme précédemment nous constatons que les tensions $R_3 i_s$ et v_s jouent le même rôle, nous n'étudierons donc que l'effet du générateur i_s soit :

$$(5.28) \quad (R_2 + R_3 + Z_Q(p))v(p) = R_2 R_3 (i_g(p) + i_s(p)) + R_3 Z_Q i_s(p)$$

Il apparaît sur cette équation que l'influence de i_s se décompose en deux parties, la première identique à l'action de i_e entraînera au second membre de (5.3) un terme $h_e(R_3 i_s, t)$ analogue à (5.20), auquel s'ajoutera l'effet de la seconde partie que nous appellerons $h_s(R_3 i_s, t)$ et qui a pour expression :

$$(5.29) \quad h_s(R_3 i_s, t) = R_3 \left(\frac{d^2 i_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di_s}{dt} + \omega_0^2 i_s \right)$$

L'action de $h_e(R_3 i_s, t)$ ayant été étudiée dans le cas précédent, il suffira de lui ajouter l'effet de $h_s(R_3 i_s, t)$ pour obtenir l'influence totale de $i_s(t)$.

Comme pour $i_e(t)$ précédemment, nous écrirons $i_s(t)$ sous la forme :

$$(5.30) \quad i_s(t) = I_s \cos \omega_s t \quad \text{avec} \quad \omega_s = \omega_0 \pm \Omega_s \quad \text{avec les mêmes conditions que pour (5.21). La forme réduite de } h_s(\omega_s, t) \text{ s'écrit donc :}$$

$$(5.31) \quad h_s(\omega_s, t) = R_3 \frac{I_s}{v_0} \left((\omega_0^2 - \omega_s^2) \cos \omega_s t - \frac{\omega_0 \omega_s}{Q} \sin \omega_s t \right)$$

quantité qui s'ajoutera comme (5.23) au second membre de (5.13). Le petit paramètre est ici la quantité :

$$(5.32) \quad \sigma_s = R_3 \frac{I_s}{v_0}, \quad \text{comme pour } \sigma_1 \text{ et } \sigma_0 : \sigma_s \ll 1.$$

Si la source de bruit est due à la résistance $R_3 \approx 50 \Omega$ nous obtenons $\sigma_s \approx 10^{-7}$. Au second membre de (5.16) nous serons donc amené à ajouter le terme :

$$(5.33) \quad h_s(\omega_s, t) = \sigma_s \left((\omega_0^2 - \omega_s^2) \cos \omega_s t - \frac{\omega_0 \omega_s}{Q} \sin \omega_s t \right)$$

5.2.3 - Effet des sources de bruit

Résumons ici les différents cas que nous avons rencontré (figure 5.3) :

a) - L'introduction d'une source $i_e(t)$ entraîne dans l'équation de l'autooscillateur (5.16) une perturbation $h_e(\omega_e, t)$ définie par (5.25).

b) - L'effet d'une source de tension $v_e(t)$ est obtenue en remplaçant dans (5.24) et (5.25) $R_2 I_e$ par V_e (amplitude de $v_e(t)$). Nous noterons $h'_e(\omega_e, t)$ la perturbation correspondante.

c) - L'action d'une source $i_s(t)$ introduit dans (5.16) une perturbation $h_e(\omega_s, t) + h_s(\omega_s, t)$: $h_e(\omega_s, t)$ étant obtenue par (5.24) et (5.25) dans lesquelles $R_2 I_e$ et ω_e ont été remplacés par $R_3 I_s$ et ω_s cf. (5.30), $h_s(\omega_s, t)$ étant définie par (5.33).

d) - L'effet d'une source $v_s(t)$ est obtenue en remplaçant dans le cas précédent $R_3 I_s$ par V_s (amplitude de $v_s(t)$). La perturbation correspondante sera appelée $h'_e(\omega_s, t) + h'_s(\omega_s, t)$.

En définitive l'équation différentielle générale régissant l'oscillateur perturbé s'écrit :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x = & f_1(x, \dot{x}) + f_2(x, \dot{x}, \ddot{x}) + f_3(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) + h_e(\omega_e, t) + h'_e(\omega_e, t) \\ (5.34) \quad & + h_e(\omega_s, t) + h_s(\omega_s, t) + h'_e(\omega_s, t) + h'_s(\omega_s, t) \end{aligned}$$

L'application du principe de superposition en première approximation permettra d'obtenir l'effet de l'ensemble des perturbations en étudiant simplement l'effet de chacun des termes de l'équation suivante :

$$(5.35) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = f_1(x, \dot{x}) + f_2(x, \dot{x}, \ddot{x}) + f_3(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) + h_e(\omega_e, t) + h_s(\omega_s, t)$$

l'effet de $h'_e(\omega_e, t)$, $h_e(\omega_s, t)$ et $h'_e(\omega_s, t)$ s'obtenant à partir de celui de $h_e(\omega_e, t)$ et l'effet de $h'_s(\omega_s, t)$ à partir de celui de $h_s(\omega_s, t)$.

5.3 - JUSTIFICATION DE LA METHODE

Nous avons déjà exposé les raisons pour lesquelles les sources de bruits ont été remplacées par des générateurs harmoniques. Il aurait semblé plus rigoureux d'introduire directement des sources de bruit définies par leur densité spectrale de puissance, le problème consistant alors à rechercher les statistiques du signal de sortie par l'intermédiaire de l'équation de Fokker-Planck associée (36). Il apparaît immédiatement plusieurs difficultés majeures :

- Les auteurs qui utilisent l'analyse statistique font toujours l'hypothèse d'une source de bruit blanc. Or physiquement une telle source de bruit est irréalisable puisqu'elle délivrerait une puissance infinie (cf. (2.33) avec $\Delta f = \infty$). Il ne s'agit pas là d'une simple objection de principe, elle pose un problème au niveau même de la mise en équation

car on ne sait pas quel type de calcul utiliser lorsque l'on a affaire à des équations différentielles non linéaires ; faut-il employer les règles du calcul différentiel déterministe (calcul de Stratonovich) comme semble le suggérer la forme des équations obtenues simplement en ajoutant, au second membre de l'équation déterministe, une perturbation aléatoire ? ou au contraire, faut-il utiliser les règles du calcul stochastique (calcul de Ito) ? ce qui, bien entendu, ne donnera pas le même résultat. Cette divergence entre le calcul de Ito et de Stratonovich et les paradoxes qu'elle entraîne sont analysés dans (37).

- Pour éviter les difficultés évoquées précédemment il est possible d'utiliser une source de bruit blanc à spectre limité, mais le calcul de l'équation de Fokker-Planck associée devient alors d'une extrême complication.

- D'autres méthodes, ne faisant pas appel à l'équation de Fokker-Planck ont été utilisées pour l'analyse des équations différentielles non linéaires soumises à des perturbations aléatoires (39). En plus de l'hypothèse du bruit blanc il est fait l'hypothèse que les perturbations aléatoires sont beaucoup plus faibles que les non-linéarités de l'oscillateur, or une comparaison des ordres de grandeur de λ , ϵ , μ (§ 5.1.4) et de σ_1 , σ_0 , σ_s (§§5.2.1, 5.2.2) montre que cette hypothèse n'est pas toujours justifiée.

DEUXIÈME PARTIE

Nous avons obtenu, à l'issue de la première partie, une équation différentielle non linéaire. De façon générale, on ne sait pas résoudre de façon analytique ce genre de problème sauf dans un certain nombre de cas particuliers notamment lorsque les non-linéarités sont faibles ce qui est le cas ici.

La résolution de ce type d'équation qui se rencontre assez fréquemment en électronique a fait l'objet de nombreuses recherches (40 à 44). Parmi celles-ci nous exposerons et nous utiliserons celles qui nous paraissent avoir la plus grande rigueur et qui sont susceptibles de la plus vaste généralisation, ce sont la méthode de la moyenne et celle de la linéarisation équivalente.

CHAPITRE 6

METHODE DE LA MOYENNE

Le but de ce chapitre est d'exposer le plus simplement possible une méthode générale d'étude d'un oscillateur.

Cette méthode, appliquée au cas particulier qui nous préoccupe, montrera que le couplage amplitude-fréquence introduit par la capacité parallèle est beaucoup plus important que le couplage d'un oscillateur classique de Van der Pol.

6.1 - INTRODUCTION

Cette méthode, basée sur la théorie de la synchronisation de Jules Haag (40, 41) a été développée parallèlement par Bogoliouboff (44) et Mitropolsky (45) et appliquée à de nombreux cas particuliers dans le domaine de la mécanique non linéaire par R. Chaléat et J. Haag (46). Elle a été récemment généralisée aux approximations d'ordres supérieurs par J.-H. Balbi (47). Nous nous bornerons à exposer la méthode, sans entrer dans le détail des démonstrations que le lecteur pourra trouver dans les références citées ci-dessus.

6.2 - THEOREME DE HAAG

Il concerne l'étude des équations différentielles du type :

$$(6.1) \quad \frac{du}{dt} = \lambda f(u, t)$$

où u et f peuvent être des vecteurs à n dimensions. L'équation (6.1) peut représenter par conséquent un système différentiel de n équations

du premier ordre. λ est un paramètre supposé infiniment petit. f est une fonction périodique du temps de période T vérifiant un certain nombre de conditions de régularité (continuité, dérivabilité ...). $f(u,t)$, dépendant explicitement du temps est une fonction non autonome.

La méthode de la moyenne consiste à remplacer ce système non autonome par un système autonome associé plus accessible à l'étude et dont la variable y est infiniment voisine de u .

Ce système associé que l'on peut mettre sous la forme :

$$(6.2) \quad \frac{dy}{dt} = \lambda F(y)$$

est obtenu en première approximation en prenant la moyenne par rapport au temps explicite du second membre de (6.1) (c'est-à-dire que y est considéré comme une constante dans l'intégration) :

$$(6.3) \quad F(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(y,t) dt$$

Le théorème de Haag établit que l'écart entre deux solutions quelconques de (6.1) et (6.2) ayant mêmes conditions initiales est en $O(\lambda^2)$ au bout d'un temps en $1/\lambda$ et qu'à toute solution constante de (6.2) correspond une solution périodique de (6.1) ayant même stabilité.

6.3 - FONCTIONS DIVERSIFIABLES

La classe des fonctions diversifiables (48) est très vaste, elle est constituée des fonctions $f(t)$ composées de deux termes de natures différentes (par exemple : un terme constant ou lentement variable et un terme de pulsation ω). Toute fonction diversifiable peut par conséquent se mettre sous la forme :

$$(6.4) \quad f(t) = \bar{f}(t) + \tilde{f}(t)$$

avec : $\bar{f}(t) \in \bar{D}$ où $\bar{D}$ désigne l'ensemble des termes de la première nature et : $\tilde{f}(t) \in \tilde{D}$ où $\tilde{D}$ est l'ensemble des termes de la seconde nature. Il est évident que : $\bar{D} \cap \tilde{D} = \phi$.

Les fonctions diversifiables doivent en outre vérifier les conditions suivantes :

$$(6.5) \quad \frac{df}{dt} \in \bar{D}, \quad \frac{d\tilde{f}}{dt} \in \tilde{D}, \quad \int \tilde{f}(t)dt \in \tilde{D}$$

le signe somme désignant ici la primitive de $\tilde{f}(t)$ sans constante d'intégration. De plus, si f et g sont deux fonctions diversifiables, le produit $f.g$ est diversifiable.

Exemple :

La fonction : $f(t) = 2 \sin^2 \omega t$ est une fonction diversifiable en effet :

$$f(t) = 1 - \cos 2\omega t \quad \left| \begin{array}{l} \rightarrow \bar{f}(t) = 1 \text{ (valeur moyenne de la fonction)} \\ \rightarrow \tilde{f}(t) = \cos 2\omega t \text{ (partie oscillante)} \end{array} \right.$$

$\bar{D}$ serait ici l'ensemble des constantes et $\tilde{D}$ l'ensemble des fonctions périodiques de moyenne nulle.

6.4 - PRINCIPE DE LA METHODE

Nous exposerons ce principe pour les deux premières approximations seulement, le lecteur pourra trouver une démonstration plus complète dans (47).

Etant donné le système de départ (6.1) : $du/dt = \lambda f(u,t)$ où $f(u,t)$ est une fonction diversifiable :

$$(6.6) \quad f(u,t) = \bar{f}(u,t) + \tilde{f}(u,t) \quad \text{avec :}$$

$\bar{f} \in \bar{D}$: ensemble des constantes et des fonctions lentement variables.

$\tilde{f} \in \tilde{D}$: ensemble des fonctions périodiques de moyenne nulle,

on cherche un changement de variable :

$u = G(y,t)$ avec $G(y,t)$ diversifiable :

$$(6.7) \quad u = G(y,t) = y + \lambda \tilde{G}(y,t) \quad \left\{ \begin{array}{l} y \in \bar{D} \\ \tilde{G}(y,t) \in \tilde{D} \end{array} \right.$$

ce changement de variable permettant de remplacer le système (6.1) par le système (6.2) :

$$\frac{dy}{dt} = \lambda F(y) \quad \text{où } F(y) \text{ est une fonction autonome.}$$

Le problème consiste à déterminer les fonctions $\tilde{G}$ et F que nous rechercherons sous la forme de développement du type :

$$\tilde{G} = \tilde{G}_1 + \lambda \tilde{G}_2 + O(\lambda^2)$$

$$\text{et } F = F_1 + \lambda F_2 + O(\lambda^2)$$

6.4.1 - Décomposition de la fonction non linéaire

Reprenons le second membre de (6.1) qui peut s'écrire :

$$(6.8) \quad f(u, t) = f(y + \lambda \tilde{G}, t) = f(y, t) + \lambda \frac{\partial f(y, t)}{\partial y} \cdot \tilde{G} + O(\lambda^2)$$

La décomposition suivant les termes de natures différentes donne, en appelant $f = f(y, t)$:

$$(6.9) \quad f(u, t) = \bar{f} + \tilde{f} + \lambda \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \cdot \tilde{G} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \cdot \tilde{G} \right) + O(\lambda^2)$$

avec : $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \tilde{G} = \overline{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \tilde{G}} + \overset{\sim}{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \tilde{G}}$ car un produit de fonctions périodiques peut donner des termes constants.

Par conséquent :

$$(6.10) \quad \bar{f}(u, t) = \bar{f}(y + \lambda \tilde{G}, t) = \bar{f} + \lambda \overline{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \tilde{G}} + O(\lambda^2)$$

$$(6.11) \quad \tilde{f}(u, t) = \tilde{f}(y + \lambda \tilde{G}, t) = \tilde{f} + \lambda \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \tilde{G} + \overset{\sim}{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \tilde{G}} \right) + O(\lambda^2)$$

6.4.2 - Forme générale du système associé

Différentions l'expression (6.7) :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial G}{\partial t} \quad \text{ou :}$$

$$(6.12) \quad \frac{du}{dt} = \left(1 + \lambda \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} + \lambda \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}$$

en reportant (6.6) et (6.12) dans (6.1), nous obtenons :

$$(6.13) \quad \frac{du}{dt} = \lambda \left(\bar{f}(u, t) + \tilde{f}(u, t) \right) = \left(1 + \lambda \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} + \lambda \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}$$

En identifiant les termes de même nature dans (6.13) et compte tenu de (6.8), il vient :

$$(6.14) \quad \frac{dy}{dt} = \lambda \bar{f}(y + \lambda \tilde{G}, t) \rightarrow F(y) = \bar{f}(y + \lambda \tilde{G}, t) \quad \text{cf. (6.2)}$$

$$\text{et : } \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} = \tilde{f}(y + \lambda \tilde{G}, t) - \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad \text{qui s'écrit aussi, compte tenu de}$$

(6.14) :

$$(6.15) \quad \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} = \tilde{f}(y + \lambda \tilde{G}, t) - \lambda \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} \cdot \bar{f}(y + \lambda \tilde{G}, t)$$

6.4.3 - Calcul des approximations successives de G

En reportant (6.10) et (6.11) dans (6.15) nous obtenons :

$$(6.16) \quad \frac{\partial \tilde{G}}{\partial t} = \tilde{f} + \lambda \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \cdot \tilde{G} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \cdot \tilde{G} - \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} \cdot \bar{f} \right) + O(\lambda^2)$$

ce qui donne, en intégrant partiellement par rapport au temps (c'est-à-dire en maintenant y constant) :

$$(6.17) \quad \tilde{G} = \int \tilde{f} + \lambda \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \int \tilde{G} + \int \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \cdot \tilde{G} - \int \frac{\partial \tilde{G}}{\partial y} \cdot \bar{f} \right) + O(\lambda^2)$$

Les termes du développement : $\tilde{G} = \tilde{G}_1 + \lambda \tilde{G}_2 + O(\lambda^2)$ peuvent alors être obtenus par récurrence :

$$(6.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{G}_1 = \int \tilde{f} \rightarrow \tilde{G} = \tilde{G}_1 + O(\lambda) \\ \tilde{G}_2 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \int \tilde{G}_1 + \int \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \cdot \tilde{G}_1 - \int \frac{\partial \tilde{G}_1}{\partial y} \cdot \bar{f} \quad \text{remarquons que dans} \\ \quad \text{cette expression } \tilde{G} \text{ a} \\ \quad \text{été remplacé par } \tilde{G}_1 + O(\lambda), \tilde{G}_2 \text{ peut donc s'écrire :} \\ \tilde{G}_2 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \iint \tilde{f} + \int \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \int \tilde{f} - \iint \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \cdot \bar{f} \end{array} \right.$$

6.4.4 - Calcul des approximations successives de F

En reportant (6.10) dans (6.14) il vient :

$$(6.19) \quad F(y) = \bar{f} + \lambda \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \cdot \tilde{G} + O(\lambda^2) \quad \text{d'où les termes du développe-}$$

ment $F = F_1 + \lambda F_2 + O(\lambda^2) :$

$$(6.20) \quad \begin{cases} F_1 = \bar{f} & (\text{cf. théorème de Haag}) \\ F_2 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \cdot \tilde{G}_1 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \int \tilde{f} & (\text{même remarque que pour (6.18)}) \end{cases}$$

Remarque :

On obtiendrait de même, en poursuivant le développement en série de Taylor (6.8), l'expression de la $n^{\text{ième}}$ approximation. Cependant, dès le troisième ordre, les relations deviennent relativement compliquées.

6.4.5 - Utilisation de la méthode

Connaissant la fonction non autonome $f(u,t)$ on peut calculer grâce à (6.20) les fonctions $F_1, F_2, \dots$, ces fonctions permettent de déterminer, grâce au système autonome (6.2) la fonction y aux différents ordres d'approximation, puis, ayant calculé $G_1, G_2, \dots$ grâce à (6.18) on obtiendra la fonction u du départ grâce à (6.7).

6.5 - MISE SOUS FORME STANDARD

L'étude d'un oscillateur conduit dans la plupart des cas à une équation différentielle du second ordre du type :

$$(6.21) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \lambda S(x, \dot{x}, t)$$

(cf. par exemple le premier terme de (5.16)), or la méthode de la moyenne concerne les systèmes différentiels du premier ordre (cf. (6.1)), il faut donc transformer l'équation (6.21) en un système du type (6.1). Cette transformation peut se faire de différentes manières, cependant, celle qui semble la mieux adaptée à l'étude des oscillateurs est sans aucun doute la forme standard qui permet de transformer (6.21) en un système

du premier ordre où les variables sont respectivement l'amplitude et la phase de $x(t)$.

Effectuons le changement de variable :

$$(6.22) \quad x(t) = a(t) \cos (\omega_0 t + \phi(t)) = a(t) \cos \psi(t)$$

$$\text{avec } \psi(t) = \omega_0 t + \phi(t)$$

où $a(t)$ et $\phi(t)$ sont des fonctions lentement variables du temps. La relation (6.22) montre que la variable x est remplacée par les deux variables a et ϕ , il y a donc une indétermination que l'on peut lever en imposant une condition sur $\dot{x}$, cette condition sera :

$$(6.23) \quad \dot{x} = -a\omega_0 \sin \psi ,$$

le reste de la dérivation par rapport au temps étant nulle :

$$(6.24) \quad \dot{a} \cos \psi - a \dot{\phi} \sin \psi = 0$$

En dérivant (6.23), nous obtenons :

$$(6.25) \quad \ddot{x} = -\dot{a}\omega_0 \sin \psi - a\omega_0^2 \cos \psi - a\omega_0 \dot{\phi} \cos \psi$$

En reportant (6.22) et (6.25) dans (6.21) nous obtenons :

$$(6.26) \quad \dot{a} \omega_0 \sin \psi + a \omega_0 \cos \psi = -\lambda S(a, \phi, t)$$

Regroupons les équations (6.24) et (6.26), nous obtenons le système :

$$(6.27) \quad \begin{cases} \dot{a} \cos \psi - a \dot{\phi} \sin \psi = 0 \\ \dot{a} \sin \psi + a \dot{\phi} \cos \psi = -\frac{\lambda}{\omega_0} S(a, \phi, t) \end{cases} , \quad \psi = \omega_0 t + \phi$$

d'où l'expression de $\dot{a}$ et $\dot{\phi}$:

$$(6.28) \quad \begin{cases} \dot{a} = -\frac{\lambda}{\omega_0} S(a, \phi, t) \sin(\omega_0 t + \phi) \\ \dot{\phi} = -\frac{\lambda}{a\omega_0} S(a, \phi, t) \cos(\omega_0 t + \phi) \end{cases}$$

En comparant ce système avec (6.1) nous voyons que u est ici le vecteur colonne :

$$(6.29) \quad \dot{u} = \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \rightarrow u = \begin{bmatrix} a \\ \phi \end{bmatrix}$$

et que $f(u,t)$ est le vecteur colonne :

$$(6.30) \quad f(u,t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega_0} S(a,\phi,t) \sin(\omega_0 t + \phi) \\ -\frac{1}{a\omega_0} S(a,\phi,t) \cos(\omega_0 t + \phi) \end{pmatrix}$$

6.6 - L'OSCILLATEUR DE VAN DER POL

Etudions notre oscillateur en l'absence de la capacité C_0 , son équation est obtenue à partir de (5.16) avec $\epsilon = \mu = 0$ (cf. remarque du § 5.1.4) :

$$(6.31) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \lambda(1 - 4x^2)\omega_0 \dot{x},$$

cette équation du type Van der Pol peut être étudiée par la méthode de la moyenne ; ici (cf. (6.21)) :

$$(6.32) \quad S(x, \dot{x}) = (1 - 4x^2)\omega_0 \dot{x} \quad \text{d'où :}$$

$$(6.33) \quad S(a,\phi,t) = - (1 - 4a^2 \cos^2 \psi) \omega_0^2 a \sin \psi$$

donc :

$$(6.34) \quad f(u,t) = \begin{pmatrix} \frac{\omega_0 a}{2} ((1-a^2) - \cos 2\psi + a^2 \cos 4\psi) \\ \frac{\omega_0}{2} ((1-2a^2) \sin 2\psi - a^2 \sin 4\psi) \end{pmatrix} \quad \text{cf. annexe 6.1}$$

La décomposition (6.6) s'écrit ici :

$$(6.35) \quad \bar{f}(u,t) = \begin{pmatrix} \frac{\omega_0 a}{2} (1 - a^2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$(6.36) \quad \tilde{f}(u,t) = \begin{pmatrix} \frac{\omega_0 a}{2} (-\cos 2\psi + a^2 \cos 4\psi) \\ \frac{\omega_0}{2} ((1 - 2a^2) \sin 2\psi - a^2 \sin 4\psi) \end{pmatrix}$$

6.6.1 - Première approximation

Le système (6.2) s'écrit ici :

$$\frac{dy}{dt} = \lambda F(y) \quad \text{avec : } y = \begin{pmatrix} a \\ \phi \end{pmatrix} + O(\lambda) \quad \text{et :}$$

$$\begin{cases} F(y) = F_1 + O(\lambda) = \bar{F}(y, t) + O(\lambda) & \text{cf. (6.20)} \\ \tilde{G} = \tilde{G}_1 + O(\lambda) = \int \tilde{f} + O(\lambda) \end{cases}$$

En première approximation nous avons donc le système suivant :

$$(6.37) \quad \begin{cases} \dot{a} = \lambda \frac{\omega_0 a}{2} (1 - a^2) + O(\lambda^2) \\ \dot{\phi} = 0 + O(\lambda^2) \end{cases}$$

Puisque nous recherchons la solution périodique c'est-à-dire une solution à amplitude constante, nous devons avoir :

$\dot{a} = 0 + O(\lambda)$ ce qui est réalisé lorsque $a^2 = 1 + O(\lambda)$ ce qui est compatible avec la définition de x donnée par (5.11) au § 5.1.3. L'intégration de (6.37) donne alors en première approximation, en régime permanent et pour le premier harmonique :

$$\begin{cases} a = 1 + O(\lambda) \\ \phi = \phi_0 + O(\lambda^2) \end{cases}, \text{ constante que l'on peut choisir arbitrairement nulle. La fréquence est alors donnée en première approximation par :}$$

$$(6.38) \quad \omega = \frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \dot{\phi} = \omega_0 + O(\lambda^2)$$

Au premier ordre il n'y a donc pas de perturbation de fréquence.

N.B. :

Comme nous ne nous intéressons qu'aux fluctuations de l'amplitude et de la phase du premier harmonique, nous ne donnerons pas la forme explicite de la solution complète, obtenue en calculant $\tilde{G}_1 = \int \tilde{f}$ par (6.36) et en effectuant la somme :

$$u = y + \lambda \tilde{G}_1.$$

6.6.2 - Seconde approximation

Le système associé est toujours : $\frac{dy}{dt} = \lambda F(y)$ mais ici :

$$y = \begin{pmatrix} a \\ \phi \end{pmatrix} + O(\lambda^2) \quad \text{et} \quad F(y) = F_1 + \lambda F_2 + O(\lambda^2)$$

$$= \overline{f}(y, t) + \lambda \overline{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \int \tilde{f}} + O(\lambda^2) \quad \text{cf. (6.20)}$$

$$= \overline{f}(y, t) + \lambda \overline{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \tilde{G}_1} + O(\lambda^2)$$

d'où :

$u = y + \lambda \tilde{G}$ avec : $\tilde{G} = \tilde{G}_1 + \lambda \tilde{G}_2 + O(\lambda^2)$ (cf. (6.18)) que nous ne calculerons pas. L'annexe 6.2 donne le calcul de F_2 qui vaut :

$$(6.39) \quad F_2 = \overline{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \int \tilde{f}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\omega_0 a^2}{4} - 3 \frac{\omega_0 a^4}{16} - \frac{\omega_0}{8} (1 - 2a^2)^2 \end{pmatrix}$$

Le système associé en seconde approximation s'écrit par conséquent :

$$(6.40) \quad \begin{cases} \dot{a} = \lambda \frac{\omega_0 a}{2} (1 - a^2) + O(\lambda^3) \\ \dot{\phi} = \lambda^2 \frac{\omega_0}{4} \left(a^2 - \frac{3}{4} a^4 - \frac{1}{2} (1 - 2a^2)^2 \right) + O(\lambda^3) \end{cases}$$

Comme précédemment, la solution périodique est obtenue lorsque $\dot{a} = 0 + O(\lambda^2)$ c'est-à-dire pour $a = 1 + O(\lambda^2)$. S'il y a une perturbation d'amplitude, elle n'apparaîtra qu'au troisième ordre, par contre, si l'on reporte la valeur de a dans (6.40)₂ nous obtenons :

$$(6.41) \quad \dot{\phi} = - \frac{\lambda^2 \omega_0}{16} .$$

En seconde approximation, la fréquence s'écrit (cf. (6.38)) :

$$(6.42) \quad \omega = \omega_0 + \dot{\phi} = \omega_0 \left(1 - \frac{\lambda^2}{16} \right) + O(\lambda^3)$$

6.6.3 - Couplage amplitude-fréquence pour l'oscillateur de Van der Pol

L'équation (6.40)₂ permet d'établir l'expression des fluctuations de fréquence entraînées par les fluctuations de l'amplitude, en effet :

$$(6.43) \quad \frac{\Delta\omega}{\Delta a} = \frac{\Delta\dot{\phi}}{\Delta a} = \lambda^2 \frac{\omega_0 a}{4} (6 - 11 a^2) + O(\lambda^3)$$

au voisinage de $a \approx 1$ nous avons :

$$(6.44) \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = - \frac{5}{4} \lambda^2 \Delta a$$

Δa représentant les fluctuations relatives d'amplitude puisque a est l'amplitude de $x(t) = \frac{v(t)}{v_0}$ cf. (5.11) donc :

$$(6.45) \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = - \frac{5}{4} \lambda^2 \frac{\Delta v_0}{v_0}$$

Compte tenu de la valeur de λ donnée au § 5.1.4 : $\lambda \approx 10^{-7}$ nous constatons qu'une instabilité relative d'amplitude : $\Delta v_0 / v_0 \approx 10^{-3}$ entraîne des fluctuations de fréquence de l'ordre de $\Delta\omega / \omega_0 \approx 10^{-17}$ absolument imperceptibles à l'expérience, c'est pourquoi la plupart des auteurs considèrent que dans ce type d'oscillateur les fluctuations d'amplitude sont sans influence sur la fréquence. Nous verrons que la présence de la capacité parallèle modifie profondément cet aspect de la question :

6.7 - INFLUENCE DE LA CAPACITE PARALLELE

Nous avons vu au § 5.1.4 que la présence de C_0 introduit deux termes supplémentaires au second membre de (5.16), l'un en ϵ l'autre en μ . Nous verrons dans le prochain chapitre que le terme en μ , bien que plus important que ceux en λ ou ϵ n'a cependant pas d'influence. L'effet de C_0 se traduit uniquement à travers le terme en ϵ . Appliquant le principe de superposition, nous allons étudier le terme en ϵ comme s'il agissait seul.

6.7.1 - Forme standard

L'équation à étudier s'écrit :

$$(6.46) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon \left((\gamma - 4x^2)\ddot{x} - 8x \dot{x}^2 \right)$$

La fonction S de (6.21) devient ici :

$$(6.47) \quad S(x, \dot{x}, \ddot{x}) = (\gamma - 4x^2)\ddot{x} - 8x \dot{x}^2$$

elle contient la variable $\ddot{x}$, nous expliquerons, au cours du calcul, comment on peut généraliser la méthode pour ce type de fonction :

Comme précédemment, nous déterminons :

$$(6.48) \quad S(a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi}, t) = -\frac{\omega_0}{2} \left\{ (2a\omega_0(\gamma - a^2) + 2a\dot{\phi}(\gamma - 3a^2)) \cos \psi + \dot{a}(\gamma - 2a^2) \sin 2\psi + 2a^3(\omega_0 - \dot{\phi}) \cos 3\psi - \dot{a}a^2 \sin 4\psi \right\} \quad \text{cf. annexe 6.3}$$

Si l'on se contente de la première approximation, il faudra chercher dans le vecteur $f(u, t)$ de (6.30) les termes dont la valeur moyenne est différente de zéro (cf. définition de $F_1(y)$) ces termes sont uniquement de la forme $\sin^2$ ou $\cos^2$. Nous constatons alors que le produit $S(a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi}, t) \sin \psi$ (cf. (6.30)) a une valeur moyenne nulle et que la valeur moyenne :

$$(6.49) \quad \overline{S(a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi}, t) \cos \psi} = -\frac{a\omega_0}{2} (\omega_0(\gamma - a^2) + \dot{\phi}(\gamma - 3a^2))$$

Le premier terme de la décomposition (6.6) s'écrit par conséquent :

$$(6.50) \quad \bar{f}(u, \dot{u}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} (\omega_0(\gamma - a^2) + \dot{\phi}(\gamma - 3a^2)) \end{pmatrix}$$

Le calcul s'effectuant en première approximation il n'est pas nécessaire d'explicitier $\bar{f}(u, \dot{u}, t)$.

6.7.2 - Première approximation

Lorsque le système différentiel est du type (6.1) : $\frac{du}{dt} = \lambda f(u, t)$ la première approximation est obtenue en résolvant le système :

$$(6.2) \quad \frac{dy}{dt} = \lambda F_1(y) + O(\lambda^2) = \lambda \bar{f}(y, t) + O(\lambda^2) \quad \text{cf. (6.20)}$$

ici le système différentiel est du type : $\frac{du}{dt} = \epsilon f(u, \dot{u}, t)$ dont la première approximation est obtenue en résolvant le système associé :

$$(6.51) \quad \frac{dy}{dt} = \epsilon F_1(y, \dot{y}) + O(\epsilon^2) = \epsilon \bar{F}(y, \dot{y}, t) + O(\epsilon^2)$$

or la forme même de l'équation montre que les termes en $\dot{y}$ du second membre de (6.51) sont du second ordre puisque $\dot{y}$ est en ϵ . En première approximation, il suffit de résoudre par conséquent le système associé :

$$(6.52) \quad \frac{dy}{dt} = \epsilon \bar{F}(y, 0, t) + O(\epsilon^2)$$

Ce résultat peut d'ailleurs se généraliser aux approximations d'ordres supérieurs et également pour les fonctions non linéaires du type $f(u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, t)$ (cf. (6.1)) (49)

Le système associé (6.2) s'écrit par conséquent en première approximation :

$$\frac{dy}{dt} = \epsilon F_1(y, 0) + O(\epsilon^2) = \epsilon \bar{F}(y, 0, t) + O(\epsilon^2)$$

ce qui s'écrit également, compte tenu de (6.50) :

$$(6.53) \quad \begin{cases} \dot{a} = 0 + O(\epsilon^2) \\ \dot{\phi} = \frac{\epsilon}{2} \omega_0 (\gamma - a^2) + O(\epsilon^2) \end{cases}$$

6.7.3 - Solution complète de l'équation de l'autooscillateur en première approximation

Cette solution est déterminée en cherchant la solution du système obtenu en superposant (6.37) et (6.53) ce qui donne :

$$(6.54) \quad \begin{cases} \dot{a} = \lambda \omega_0 \frac{a}{2} (1 - a^2) + O(\lambda^2) \\ \dot{\phi} = \frac{\epsilon \omega_0}{2} (\gamma - a^2) + O(\lambda^2) \end{cases}$$

La solution périodique est obtenue pour $\dot{a} = 0 + O(\lambda^2)$ c'est-à-dire pour $a = 1 + O(\lambda)$ comme pour l'oscillateur Van der Pol.

En reportant la valeur de a dans (6.54)₂ nous obtenons :

$$(6.55) \quad \dot{\phi} = -\frac{\epsilon \omega_0}{2} (\gamma - 1) + O(\lambda^2)$$

ce qui permet de déterminer la fréquence de l'oscillateur (cf. (6.38)) .

$$(6.56) \quad \omega = \omega_0 + \dot{\phi} = \omega_0 \left(1 + \frac{\epsilon}{2} (\gamma - 1) \right) + O(\lambda^2)$$

que nous pouvons écrire également compte tenu des valeurs de ϵ et γ

$$(5.14) \text{ et } (5.15) : \quad \frac{\epsilon}{2} (\gamma - 1) = \frac{C_0 R_1^2}{2L_1} \quad \text{d'où :}$$

$$(6.57) \quad \omega = \omega_0 \left(1 + \frac{C_0 R_1^2}{2L_1} \right) + O(\lambda^2)$$

valeur que nous avons déjà obtenue par une autre méthode au chapitre 4 (cf. (4.29)). L'aspect le plus important de la méthode n'est pas tant ce résultat que l'expression du couplage amplitude-fréquence introduit par la capacité parallèle.

6.7.4 - Couplage amplitude-fréquence dû à C_0

La perturbation de fréquence due aux fluctuations d'amplitude est obtenue à partir de (6.54)₂, elle s'écrit :

$$(6.58) \quad \frac{\Delta\omega}{\Delta a} = \frac{\Delta\dot{\phi}}{\Delta a} = -\epsilon \omega_0 a + O(\lambda^2)$$

De même qu'en (6.45), nous obtenons les fluctuations relatives de fréquence en fonction des fluctuations relatives d'amplitude :

$$(6.59) \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\epsilon \frac{\Delta v_0}{v_0} \quad \text{où} \quad \epsilon \approx 10^{-9} \quad \text{cf. § 5.1.4}$$

Si l'on compare ce résultat à celui que nous avons obtenu pour l'oscillateur Van der Pol (§ 6.6.3) nous constatons que les mêmes instabilités relatives d'amplitude $\Delta v_0 / v_0 \approx 10^{-3}$ provoquent ici une fluctuation relative $\Delta\omega / \omega_0 \approx 10^{-12}$, valeur qui est tout à fait accessible à l'expérience.

Ce résultat montre que l'hypothèse qui consiste à négliger l'influence des fluctuations d'amplitude sur la stabilité de fréquence n'est pas toujours justifiée.

CHAPITRE 7

METHODE DE LA LINEARISATION EQUIVALENTE

Une seconde méthode d'analyse des oscillateurs est exposée dans ce chapitre, bien que n'ayant pas la même portée que la précédente, elle permettra de démontrer que le terme le plus important dans l'équation différentielle de fonctionnement n'a pourtant aucune influence sur le mouvement de l'oscillateur.

7.1 - INTRODUCTION

Le deuxième membre de l'équation (5.16), régissant le fonctionnement de l'oscillateur que nous étudions est constitué de trois termes. Nous avons souligné à plusieurs reprises qu'en première approximation la solution d'une telle équation pouvait être obtenue en utilisant le principe de superposition. A cette fin, nous avons calculé par la méthode de la moyenne, la première approximation en λ (cf. (6.37)), nous avons alors obtenu un terme en amplitude fixant l'amplitude des oscillations, mais pas de terme en phase. Nous avons ensuite déterminé la première approximation en ϵ (cf. (6.53)) qui ne donne pas de terme en amplitude mais un terme en phase exprimant le couplage amplitude-fréquence. La même méthode appliquée au terme en μ ne donne pas de perturbation d'amplitude ni de phase ce qui signifie que si ce terme a une influence elle n'apparaîtra qu'en seconde approximation.

A cet ordre d'approximation le principe de superposition n'est en principe plus applicable cependant, si l'on considère que cette seconde approximation est constituée de termes en λ^2 , ϵ^2 , μ^2 , $\lambda\epsilon$, $\lambda\mu$ et $\mu\epsilon$, nous voyons (compte tenu des valeurs numériques indiquées au § 5.1.4) que μ^2 reste plus grand que λ et ϵ et, à plus forte raison, plus grand

que tous les autres termes du second ordre. Il suffit donc de calculer la deuxième approximation pour le terme en μ seulement et d'appliquer le principe de superposition.

Par la méthode de la moyenne, le calcul, relativement laborieux de cette seconde approximation, montre qu'il n'y a encore ni terme en amplitude, ni terme en phase, par conséquent il faudra calculer la troisième approximation pour déterminer l'influence des termes en μ . Ce calcul est indispensable car il ne faut pas perdre de vue que $\mu^3 \approx \epsilon$ ce qui permet heureusement d'utiliser encore une fois la superposition. Mais même avec cette simplification, la méthode de la moyenne conduit en troisième approximation, à des calculs inextricables. C'est pourquoi nous lui avons préféré la méthode de la linéarisation équivalente mise au point très récemment par J.-H. Balbi (50) et qui est une généralisation de la méthode du premier harmonique.

7.2 - PRINCIPE DE LA METHODE

Contrairement à la méthode de la moyenne, la linéarisation équivalente ne nécessite pas la mise sous forme standard, elle concerne directement les équations différentielles du type :

$$(7.1) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \lambda f(x, \dot{x})$$

où λ est un paramètre infiniment petit et $f(x, \dot{x})$ une fonction non linéaire de x et de $\dot{x}$ (nous verrons que la méthode s'applique parfaitement au cas où f contient des dérivées d'ordre supérieur).

La méthode consiste à rechercher un changement de variable :

$$(7.2) \quad x = y + \lambda G(t)$$

permettant de remplacer l'équation non linéaire (7.1) par l'équation linéaire :

$$(7.3) \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = \lambda F(y, \dot{y})$$

$F(y, \dot{y})$ étant linéaire, elle peut s'écrire :

$$(7.4) \quad F(y, \dot{y}) = Ay + B\dot{y}$$

Notre problème étant de rechercher la solution périodique permanente de (7.3) qui est de la forme :

$$(7.5) \quad y = a \cos \omega t$$

il est indispensable que le terme d'amortissement soit nul, c'est-à-dire :

(7.6) $B = 0$, cette condition imposant généralement la valeur de l'amplitude a .

Dans ces conditions (7.3) peut s'écrire sous la forme :

$$(7.7) \quad \ddot{y} + (\omega_0^2 - \lambda A) y = 0 \quad \text{d'où :}$$

$$(7.8) \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda A$$

De façon générale, la condition (7.6) fixe l'amplitude des oscillations tandis que (7.8) permet d'accéder au couplage amplitude-fréquence.

Le problème revient à la recherche des fonctions $F(y, \dot{y})$ et $G(t)$.

7.2.1 - Définition de $F(y, \dot{y})$ et de $G(t)$

Reportons le changement de variable (7.2) dans (7.1), nous obtenons :

$$(7.9) \quad \ddot{y} + \lambda \ddot{G} + \omega_0^2 (y + \lambda G) = \lambda f(y + G, \dot{y} + \lambda \dot{G})$$

ce qui s'écrit, compte tenu de (7.3):

$$(7.10) \quad \ddot{G} + \omega_0^2 G = f(y + \lambda G, \dot{y} + \lambda \dot{G}) - F(y, \dot{y})$$

y étant de la forme : $y = a \cos \omega t$ (cf. (7.5)), la fonction $F(y, \dot{y})$ définie par (7.4) contient donc uniquement des premiers harmoniques. La présence de tels termes au second membre de (7.10) pourrait entraîner une résonance, c'est-à-dire que $G(t)$ pourrait devenir si grand que x et y ne seraient plus infiniment voisins, ce qui serait contraire à l'hypothèse (7.2). Pour que cette éventualité ne se produise pas, il faut que $F(y, \dot{y})$ soit égale à l'ensemble des premiers harmoniques de $f(y + \lambda G, \dot{y} + \lambda \dot{G})$.

Reprenant l'idée des fonctions diversifiables, nous noterons :

$$(7.11) \quad f(y + \lambda G, \dot{y} + \lambda \dot{G}) = \bar{F}(y + \lambda G, \dot{y} + \lambda \dot{G}) + \check{f}(y + \lambda G, \dot{y} + \lambda \dot{G})$$

où $\bar{F}$ désigne à présent l'ensemble des termes qui contiennent le premier

harmonique et $\bar{f}$ l'ensemble des termes constants et contenant les harmoniques d'ordre supérieur. $F(y, \dot{y})$ est alors définie par :

$$(7.12) \quad F(y, \dot{y}) = \bar{f}(y + \lambda G, \dot{y} + \lambda \dot{G})$$

Si l'on reporte les définitions (7.11) et (7.12) dans (7.10) nous obtenons :

$$(7.13) \quad \ddot{G} + \omega_0^2 G = \bar{f}(y + \lambda G, \dot{y} + \lambda \dot{G})$$

équation qui permet le calcul de la fonction $G(t)$.

7.2.2 - Approximations successives

Comme pour la méthode de la moyenne, les approximations successives sont obtenues en décomposant la fonction non-linéaire $f(y + \lambda G, \dot{y} + \lambda \dot{G})$ en série de Taylor au voisinage du point $(y, \dot{y})$ ce qui s'écrit :

$$(7.14) \quad \begin{aligned} f(y + \lambda G, \dot{y} + \lambda \dot{G}) = & f(y, \dot{y}) + \lambda \left(\frac{\partial f(y, \dot{y})}{\partial y} \cdot G + \frac{\partial f(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} \cdot \dot{G} \right) \\ & + \frac{\lambda^2}{2} \left(\left(\frac{\partial f(y, \dot{y})}{\partial y} \cdot G + \frac{\partial f(y, \dot{y})}{\partial \dot{y}} \cdot \dot{G} \right)^2 + O(\lambda^3) \right) \end{aligned}$$

les doubles parenthèses indiquant que l'exposant est une puissance symbolique, en notant $f = f(y, \dot{y})$ nous avons :

$$(7.15) \quad \left(\left(\frac{\partial f}{\partial y} G + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G} \right) \right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} G^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}} G \dot{G} + \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y}^2} \dot{G}^2$$

Nous pouvons alors rechercher les approximations successives de F et G sous la forme :

$$(7.16) \quad F(y, \dot{y}) = F_1 + \lambda F_2 + \lambda^2 F_3 + O(\lambda^3)$$

$$(7.17) \quad G(t) = G_1 + \lambda G_2 + \lambda^2 G_3 + O(\lambda^3)$$

En reportant (7.16), (7.17) et (7.14) dans (7.12), nous obtenons :

$$(7.18) \quad \begin{aligned} F_1 + \lambda F_2 + \lambda^2 F_3 = & \bar{f} + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial y} (G_1 + \lambda G_2 + \dots) + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} (\dot{G}_1 + \lambda \dot{G}_2 + \dots) \right) \\ & + \frac{\lambda^2}{2} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial y} (G_1 + \lambda G_2 + \dots) + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} (\dot{G}_1 + \lambda \dot{G}_2 + \dots) \right)^2 \right) \end{aligned}$$

ce qui donne encore en groupant les termes de même puissance en λ :

$$(7.18) \quad F_1 + \lambda F_2 + \lambda^2 F_3 = \overline{f} + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_1 \right) + \lambda^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} G_2 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_1 \right) \right)^2 + O(\lambda^3)$$

et de même :

$$(7.19) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\ddot{G}_1 + \omega_0^2 G_1) + \lambda (\ddot{G}_2 + \omega_0^2 G_2) + \lambda^2 (\ddot{G}_3 + \omega_0^2 G_3) = \\ & \quad \overline{f}(y, \dot{y}) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial y} (G_1 + \lambda G_2 + \dots) + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} (\dot{G}_1 + \lambda \dot{G}_2 + \dots) \right) + \\ & \quad + \frac{\lambda^2}{2} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} G_2 + \dots \right) + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} (\dot{G}_1 + \lambda \dot{G}_2 + \dots) \right)^2 \\ & = \overline{f} + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_1 \right) + \lambda^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} G_2 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_1 \right) \right)^2 \end{aligned} \right.$$

En identifiant dans (7.18) les termes de même puissance, nous obtenons :

$$(7.20) \quad F_1(y, \dot{y}) = \overline{f}(y, \dot{y})$$

$$(7.21) \quad F_2(y, \dot{y}) = \frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_1$$

$$(7.22) \quad F_3(y, \dot{y}) = \frac{\partial f}{\partial y} G_2 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_2 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_1 \right) \right)^2$$

De même l'identification terme à terme de (7.19) permet d'écrire :

$$(7.23) \quad \ddot{G}_1 + \omega_0^2 G_1 = \overline{f}(y, \dot{y})$$

$$(7.24) \quad \ddot{G}_2 + \omega_0^2 G_2 = \frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_1$$

$$(7.25) \quad \ddot{G}_3 + \omega_0^2 G_3 = \frac{\partial f}{\partial y} G_2 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_2 + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_1 \right) \right)^2$$

Le calcul des fonctions G_1 est généralement simple puisque les équations différentielles qui les donnent sont linéaires.

7.2.3 - Emploi de la méthode, détermination de la solution périodique

Le calcul des approximations successives de $F(y, \dot{y})$ permet d'écrire (7.4) sous la forme :

$$(7.26) \quad F(y, \dot{y}) = (A_1 + \lambda A_2 + \lambda^2 A_3)y + (B_1 + \lambda B_2 + \lambda^2 B_3)\dot{y} + O(\lambda^3)$$

La condition (7.6) impose alors :

$$(7.27) \quad B_1 + \lambda B_2 + \lambda^2 B_3 = 0 \rightarrow B_1 = B_2 = B_3 = 0$$

d'où les approximations successives de l'amplitude a de (7.5) ainsi que les approximations successives de la fréquence définie par (7.8) :

$$(7.28) \quad \omega^2 = \omega_0^2 - (\lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3) + O(\lambda^4)$$

Dans la pratique, le calcul s'effectue de la façon suivante :

a) - Première approximation

Ayant posé : $y = a \cos \omega t$, on calcule $f(y, \dot{y})$ ce qui permet par séparation des termes de natures différentes d'exprimer $\bar{f}(y, \dot{y})$ et $\tilde{f}(y, \dot{y})$ nous connaissons donc $F_1(y, \dot{y})$ (cf. (7.20)) que nous pouvons mettre sous la forme :

$$(7.29) \quad F_1(y, \dot{y}) = A_1 y + B_1 \dot{y} ,$$

la condition (7.6) ou (7.27) impliquant $B_1 = 0$ nous pouvons déterminer l'amplitude en première approximation. La connaissance de A_1 par (7.29) permet alors de déterminer la fréquence grâce à (7.8) ou (7.28) :

$$(7.30) \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda A_1 + O(\lambda^2) \quad (\text{cf. méthode du premier harmonique})$$

b) - Seconde approximation et approximations d'ordre supérieur

Connaissant $\tilde{f}(y, \dot{y})$, l'équation différentielle (7.23) permet de calculer $G_1(t)$ tandis que la relation (7.21) donne accès à $F_2(y, \dot{y})$, cette fonction étant de la forme :

$$(7.31) \quad F_2(y, \dot{y}) = A_2 y + B_2 \dot{y} ,$$

la condition $B_2 = 0$ fournit la seconde approximation de l'amplitude et

la valeur de A_2 permet de connaître la fréquence à l'ordre 2 :

$$(7.32) \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda A_1 - \lambda^2 A_2 + O(\lambda^2)$$

Reportant G_1 dans le second membre de (7.24), nous avons $G_2(t)$ d'où $F_3(y, \dot{y})$ par (7.22), etc...

7.2.4 - Généralisation de la méthode

L'étude du terme en μ de l'équation (5.16) conduit à une équation différentielle du type :

$$(7.33) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$$

Cette équation diffère de (7.1) par la présence de dérivées d'ordre supérieur à un dans f . Cependant la méthode de la linéarisation équivalente reste entièrement valable, le changement de variable (7.2) et l'équation linéaire (7.3) ainsi que la condition (7.6) et le résultat (7.8) subsistent, la seule différence intervient dans (7.9) à partir de laquelle il suffit de remplacer partout : $f(y+\lambda G, \dot{y}+\lambda \dot{G}, \ddot{y}+\lambda \ddot{G}, \ddot{\ddot{y}}+\lambda \ddot{\ddot{G}})$ par la fonction $f(y+\lambda G, \dot{y}+\lambda \dot{G}, \ddot{y}+\lambda \ddot{G}, \ddot{\ddot{y}}+\lambda \ddot{\ddot{G}})$ dont le développement en série de Taylor (7.14) s'effectuera au voisinage du point $(y, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{\ddot{y}})$:

$$(7.34) \quad f(y+\lambda G, \dot{y}+\lambda \dot{G}, \ddot{y}+\lambda \ddot{G}, \ddot{\ddot{y}}+\lambda \ddot{\ddot{G}}) = f(y, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{\ddot{y}}) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial y} G + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G} + \frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} \ddot{G} + \frac{\partial f}{\partial \ddot{\ddot{y}}} \ddot{\ddot{G}} \right) + \frac{\lambda^2}{2} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial y} G + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G} + \frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} \ddot{G} + \frac{\partial f}{\partial \ddot{\ddot{y}}} \ddot{\ddot{G}} \right)^2 \right) + O(\lambda^3)$$

avec $f = f(y, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{\ddot{y}})$. Les étapes ultérieures du calcul s'obtiennent en remplaçant le développement (7.14) par (7.34).

7.3 - APPLICATION A L'OSCILLATEUR DE VAN DER POL

Pour mieux comprendre les différentes étapes du calcul, reprenons l'oscillateur de Van der Pol que nous avons traité par la méthode de la moyenne (cf. (6.31)) :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \lambda(1 - 4x^2) \omega_0 \dot{x}$$

nous avons ici :

$$(7.35) \quad f(x, \dot{x}) = (1-4x^2)\omega_0 \dot{x} \rightarrow f(y, \dot{y}) = (1-4y^2)\omega_0 \dot{y}$$

posons :

$$(7.36) \quad y = a \cos \omega t \rightarrow \dot{y} = -a \omega \sin \omega t.$$

Nous obtenons alors :

$$(7.37) \quad f(y, \dot{y}) = -a \omega \omega_0 (1-a^2) \sin \omega t + a^3 \omega \omega_0 \sin 3\omega t$$

La diversification de $f(y, \dot{y})$ nous donne :

$$(7.38) \quad \bar{f}(y, \dot{y}) = -a \omega \omega_0 (1-a^2) \sin \omega t = \omega_0 (1-a^2) \dot{y}$$

et :

$$(7.39) \quad \tilde{f}(y, \dot{y}) = a^3 \omega \omega_0 \sin 3\omega t$$

7.3.1 - Première approximation

Nous obtenons la première approximation du système linéaire associé en écrivant :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \lambda F_1(y, \dot{y}) + O(\lambda^2) \quad \text{cf. (7.3)} \quad \text{avec :}$$

$$(7.40) \quad F_1(y, \dot{y}) = \bar{f}(y, \dot{y}) = \omega_0 (1-a^2) \dot{y} = A_1 y + B_1 \dot{y} \quad \text{cf. (7.29)}$$

Nous constatons ici que $A_1 = 0$ par conséquent en première approximation (cf. (7.30)) : $\omega^2 = \omega_0^2 + O(\lambda^2) \rightarrow \omega = \omega_0 + O(\lambda^2)$.

La condition d'amortissement nul : $B_1 = 0$ implique d'autre part que $a^2 = 1 + O(\lambda)$ d'où $a = 1 + O(\lambda)$, nous retrouvons ainsi les résultats du § 6.6.1.

7.3.2 - Seconde approximation

Elle nécessite la résolution de l'équation (7.23) :

$$(7.41) \quad \ddot{G}_1 + \omega_0^2 G_1 = \tilde{f}(y, \dot{y}) = a^3 \omega \omega_0 \sin 3\omega t \quad \text{ce qui donne :}$$

$$(7.42) \quad G_1 = \frac{a^3 \omega \omega_0}{\omega_0^2 - 9\omega^2} \sin 3\omega t \rightarrow \dot{G}_1 = \frac{3a^3 \omega^2 \omega_0}{\omega_0^2 - 9\omega^2} \cos 3\omega t$$

Nous pouvons à présent calculer $F_2(y, \dot{y})$ par (7.21). En posant $f = f(y, \dot{y})$, nous avons (cf. (7.35)) :

$$(7.43) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = -8\omega_0 y \dot{y} = 4\omega_0 \omega a^2 \sin 2\omega t \\ \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = \omega_0 (1-4y^2) = \omega_0 (1-2a^2) - 2a^2 \omega_0 \cos 2\omega t \end{cases}$$

ce qui donne :

$$(7.44) \quad F_2(y, \dot{y}) = \frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_1 = - \frac{\omega_0^2 \omega^2 a^5}{\omega_0^2 - 9\omega^2} \cos \omega t = - \frac{\omega_0^2 \omega^2 a^4}{\omega_0^2 - 9\omega^2} y = A_2 y + B_2 \dot{y} \quad \text{cf. (7.31)}$$

Le coefficient B_2 étant nul, l'amplitude n'est pas modifiée en deuxième approximation, nous avons alors : $a = 1 + O(\lambda^2)$, en reportant cette valeur de a et la valeur de ω calculée en première approximation dans :

$$A_2 = - \frac{\omega_0^2 \omega^2 a^4}{\omega_0^2 - 9\omega^2} \quad \text{nous obtenons la seconde approximation de } \omega \text{ (cf. (7.32)) :}$$

$$A_2 = \frac{\omega_0^2}{8} \quad \text{d'où} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 A_2 + O(\lambda^3) \rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 (1 - \frac{\lambda^2}{8}) + O(\lambda^3)$$

soit encore : $\omega = \omega_0 (1 - \frac{\lambda^2}{16}) + O(\lambda^3)$, résultats identiques à ceux du § 6.6.2.

7.4 - APPLICATION AU TROISIEME TERME DE L'EQUATION (5.6)

Nous allons à présent démontrer que le troisième terme de l'équation (5.6) n'a pas d'influence sur le comportement de l'oscillateur. Le problème consiste à étudier l'équation différentielle :

$$(7.45) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \mu \left((\gamma - 4x^2) \left(\frac{\ddot{x}}{\omega_0} + \omega_0 \dot{x} \right) - \frac{8\dot{x}}{\omega_0} (3x\dot{x} + \dot{x}^2) \right)$$

qui est du type (7.33). La fonction $f(y, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{\dot{y}})$ intervenant dans le développement (7.34) s'écrit ici :

$$(7.46) \quad f(y, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{\dot{y}}) = (\gamma - 4x^2) \left(\frac{\ddot{y}}{\omega_0} + \omega_0 \dot{y} \right) - \frac{8\dot{y}}{\omega_0} (3y\ddot{y} + \dot{y}^2)$$

En posant : $y = a \cos \omega t$, nous obtenons :

$$(7.47) \quad f(y, \dot{y}, \ddot{y}, \ddot{\ddot{y}}) = a \frac{\omega}{\omega_0} (\omega^2 - \omega_0^2) (\gamma - a^2) \sin \omega t - a^3 \frac{\omega}{\omega_0} (9\omega^2 - \omega_0^2) \sin 3\omega t$$

ce qui donne après diversification :

$$(7.48) \quad \bar{f} = - \frac{1}{\omega_0} (\omega^2 - \omega_0^2) (\gamma - a^2) \dot{y}$$

$$(7.49) \quad \ddot{f} = - a^3 \frac{\omega}{\omega_0} (9\omega^2 - \omega_0^2) \sin 3\omega t$$

7.4.1 - Première approximation

Le système linéaire associé (7.3) s'écrit :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \mu F_1(y, \dot{y}) + O(\mu^2) \quad \text{avec :}$$

$$(7.50) \quad F_1(y, \dot{y}) = \bar{f} = - \frac{1}{\omega_0} (\omega^2 - \omega_0^2) (\gamma - a^2) \dot{y} = A_1 y + B_1 \dot{y}$$

En première approximation, la fréquence est donnée par :

(cf. (7.30))

$$(7.51) \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \mu A_1 = O(\mu^2) \quad \text{or ici} \quad A_1 = 0 \rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + O(\mu^2)$$

cette valeur de ω^2 reportée dans (7.50) montre que la condition d'amortissement nul : $B_1 = 0$ est vérifiée quelle que soit a , l'amplitude est donc indéterminée à cet ordre d'approximation.

7.4.2 - Seconde approximation

Pour l'obtenir, nous devons résoudre l'équation différentielle :

$$(7.52) \quad \ddot{G}_1 + \omega_0^2 G_1 = \ddot{f} = - a^3 \frac{\omega}{\omega_0} (9\omega^2 - \omega_0^2) \sin 3\omega t$$

dont la solution est immédiate :

$$(7.53) \quad G_1 = a^3 \frac{\omega}{\omega_0} \sin 3\omega t$$

Avec les valeurs suivantes :

$$(7.54) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= -8 \frac{y}{\omega_0} (\ddot{y} + \omega_0^2 \dot{y}) - \frac{24}{\omega_0} \dot{y} \ddot{y} = 4a^2 \frac{\omega}{\omega_0} (\omega_0^2 - 4\omega^2) \sin 2\omega t \\ \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} &= \omega_0 (\gamma - 4y^2) - \frac{24}{\omega_0} (\dot{y}^2 + y \ddot{y}) = \omega_0 (\gamma - 2a^2) + \frac{2a^2}{\omega_0} (12\omega^2 - \omega_0^2) \cos 2\omega t \\ \frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} &= -\frac{24}{\omega_0} y \dot{y} = 12 a^2 \frac{\omega}{\omega_0} \sin 2\omega t \\ \frac{\partial f}{\partial \ddot{\ddot{y}}} &= \frac{1}{\omega_0} (\gamma - 4y^2) = \frac{1}{\omega_0} (\gamma - 2a^2) - \frac{2a^2}{\omega_0} \cos 2\omega t \end{aligned} \right.$$

nous obtenons l'expression du second terme du développement (7.34) avec $G = G_1 + O(\mu)$:

$$(7.55) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_1 + \frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} \ddot{G}_1 + \frac{\partial f}{\partial \ddot{\ddot{y}}} \ddot{\ddot{G}}_1 = \\ a^5 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (\omega^2 - \omega_0^2) \cos \omega t + 3a^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (\gamma - 2a^2) (\omega_0^2 - 9\omega^2) \cos 3\omega t \\ - 5a^5 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (\omega_0^2 - 25\omega^2) \cos 5\omega t \end{aligned}$$

La fonction linéaire $F_2(y, \dot{y})$ (cf. (7.20)) prend ici la forme suivante :

$$(7.56) \quad F_2(y, \dot{y}) = a^5 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (\omega^2 - \omega_0^2) \cos \omega t = a^4 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (\omega^2 - \omega_0^2) y = A_2 y + B_2 \dot{y} \quad \text{cf. (7.31)}$$

Le coefficient B_2 est nul, par conséquent l'amplitude reste indéterminée en seconde approximation. De plus, en reportant la première approximation de ω dans la valeur de A_2 , nous obtenons $A_2 = 0$, par conséquent en seconde approximation (cf. (7.32)) : $\omega^2 = \omega_0^2 + O(\mu^3)$.

7.4.3 - Troisième approximation

La fonction linéaire $F_3(y, \dot{y})$ de (7.20) est définie dans notre cas par :

$$(7.57) \quad F_3(y, \dot{y}) = \overline{\frac{\partial f}{\partial y} G_2} + \overline{\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_2} + \overline{\frac{\partial f}{\partial y} \ddot{G}_2} + \overline{\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \ddot{\dot{G}}_2} + \frac{1}{2} \left(\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \ddot{G}_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \ddot{\dot{G}}_1 \right)^2} \right)$$

avec :

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial y} G_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \ddot{G}_1 + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \ddot{\dot{G}}_1 \right)^2} &= \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} G_1^2} + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \dot{G}_1^2} + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \ddot{G}_1^2} + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \ddot{\dot{G}}_1^2} \\ &+ 2 \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}} G_1 \dot{G}_1} + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}} G_1 \ddot{G}_1} + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}} G_1 \ddot{\dot{G}}_1} + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}} \dot{G}_1 \ddot{G}_1} + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}} \dot{G}_1 \ddot{\dot{G}}_1} + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}} \ddot{G}_1 \ddot{\dot{G}}_1} \right) \end{aligned}$$

G_2 étant ici solution de l'équation différentielle (cf. (7.24))

$$(7.58) \quad \ddot{G}_2 + \omega_0^2 G_2 = \overline{\frac{\partial f}{\partial y} G_1} + \overline{\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \dot{G}_1} + \overline{\frac{\partial f}{\partial y} \ddot{G}_1} + \overline{\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \ddot{\dot{G}}_1}$$

ou encore, compte tenu de (7.55) :

$$(7.59) \quad \ddot{G}_2 + \omega_0^2 G_2 = 3a^3 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (\gamma - 2a^2) (\omega_0^2 - 9\omega^2) \cos 3\omega t - 5a^5 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (\omega_0^2 - 25\omega^2) \cos 5\omega t$$

cette solution s'écrit :

$$(7.60) \quad G_2 = 3a^3 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (\gamma - 2a^2) \cos 3\omega t - 5a^5 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cos 5\omega t$$

Le calcul de $F_3(y, \dot{y})$ nécessite en outre la connaissance des quantités suivantes :

$$(7.61) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{8\dot{y}}{\omega_0} (\omega_0^2 - \omega^2) = & G_1^2 &= \frac{a^6 \omega^2}{2\omega_0^2} (1 - \cos 6\omega t) \\ &8a \frac{\omega}{\omega_0} (\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t & \dot{G}_1^2 &= \frac{9a^6 \omega^3}{2\omega_0^2} (1 + \cos 6\omega t) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y}^2} &= -\frac{48}{\omega_0} \dot{y} = 48a \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega t \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 (7.61) \quad & \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y}^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \ddot{y}^2} = 0 \\
 & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}} = -8\omega_0 \dot{y} - \frac{24}{\omega_0} \ddot{y} = \\
 & \quad -8 \frac{a}{\omega_0} (\omega_0^2 - 3\omega^2) \cos \omega t \\
 & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \ddot{y}} = -\frac{24}{\omega_0} \dot{y} = 24 a \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega t \\
 & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \ddot{\dot{y}}} = -\frac{8y}{\omega_0} = -8 \frac{a}{\omega_0} \cos \omega t \\
 & \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y} \partial \ddot{y}} = -\frac{24}{\omega_0} y = -24 \frac{a}{\omega_0} \cos \omega t \\
 & \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{y} \partial \ddot{\dot{y}}} = \frac{\partial^2 f}{\partial \ddot{y} \partial \ddot{y}} = 0
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 G_1 \dot{G}_1 &= \frac{3a^6 \omega^3}{2\omega_0^2} \sin 6\omega t \\
 G_1 \ddot{G}_1 &= -\frac{9a^6 \omega^2}{2\omega_0^2} (1 - \cos 6\omega t) \\
 G_1 \ddot{\dot{G}}_1 &= -\frac{27a^6}{2} \frac{\omega^5}{\omega_0^2} \sin 6\omega t \\
 \dot{G}_1 \ddot{G}_1 &= -\frac{27a^6}{2} \frac{\omega^5}{\omega_0^2} \sin 6\omega t
 \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer $F_3(y, \dot{y})$ qui donne tous calculs faits :

$$\begin{aligned}
 (7.62) \quad F_3 &= a^5 \frac{\omega^3}{\omega_0^3} (\omega_0^2 - \omega^2) (3\gamma - 4a^2) \sin \omega t = a^4 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (\omega_0^2 - \omega^2) (3\gamma - 4a^2) \dot{y} \\
 &= A_3 y^0 + B_3 \dot{y}
 \end{aligned}$$

Ici le coefficient $A_3 = 0$, nous pouvons alors écrire :

$$\omega = \omega_0 + O(\mu^4), \text{ ce qui donne, en reportant cette valeur dans } (7.62) : B_3 = 0.$$

En définitive, à la troisième approximation, l'amplitude reste indéterminée et la fréquence n'est pas affectée.

Ce résultat démontre l'affirmation que nous avons faite au début du § 6.7 : le troisième terme de l'équation (5.6), bien que plus important que les deux premiers, est cependant sans influence sur le comportement de l'oscillateur.

Bien que le résultat de ce calcul soit plutôt négatif, il a permis d'exposer ici une méthode simple de résolution par approximations successives qui permettra sans doute l'étude approfondie de nombreux types d'oscillateurs.

CHAPITRE 8

SPECTRES THEORIQUES D'UN OSCILLATEUR PERTURBE

Dans ce chapitre, l'expression analytique des spectres de phase et d'amplitude est établie. L'incidence de la position de la source de bruit et l'influence de la capacité parallèle sur la forme des spectres sont soulignées.

8.1 - POSITION DU PROBLEME

La méthode de la moyenne et celle de la linéarisation équivalente nous ont permis d'analyser le comportement de l'oscillateur non perturbé et de donner l'expression analytique du mouvement.

Nous allons à présent étudier l'influence des sources de bruit telles qu'elles ont été définies au § 5.2 ; le problème consiste donc à étudier l'influence des trois derniers termes de l'équation (5.35) c'est-à-dire :

$$(8.1) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = h_e(\omega_e, t) + h_s(\omega_s, t) + h_e(\omega_s, t)$$

$h_e(\omega_e, t)$ exprimant l'influence de la modulation à l'entrée et $h_s(\omega_s, t) + h_e(\omega_s, t)$ celle de la modulation à la sortie. (cf. (5.23)).

Si l'on compare les expressions de ces différentes fonctions données par (5.25) et (5.33), nous constatons qu'elles sont toutes de la forme :

$$(8.2) \quad h(\omega, t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad \text{avec :}$$

$$(8.3) \quad \omega = \omega_0 \pm \Omega \quad , \quad \Omega \ll \omega_0 \quad \text{(cf. (5.21) et (5.30))}$$

- Pour $h_e(\omega_e, t)$, nous avons :

$$(8.4)_1 \quad \begin{cases} A = A_e = -\frac{\sigma_0}{Q} (\omega_0 \pm \Omega)^2 \\ B = B_e = -\sigma_1 \omega_0 (\omega_0 \pm \Omega) \pm \sigma_0 \frac{\Omega}{\omega_0} (\omega_0 \pm \Omega)(2\omega_0 \pm \Omega) \end{cases}$$

- Pour $h_s(\omega_s, t) + h_e(\omega_s, t)$ nous devrons utiliser :

$$(8.4)_2 \quad \begin{cases} A = A_s + A_e = \pm \sigma_s \Omega (2\omega_0 \pm \Omega) - \frac{\sigma_0}{Q} (\omega_0 \pm \Omega)^2 \\ B = B_s + B_e = -\frac{\sigma_s \omega_0}{Q} (\omega_0 \pm \Omega) - \sigma_1 \omega_0 (\omega_0 \pm \Omega) \pm \sigma_0 \frac{\Omega}{\omega_0} (\omega_0 \pm \Omega)(2\omega_0 \pm \Omega) \end{cases}$$

σ_1 et σ_0 étant donnés par (5.24) et σ_s par (5.32).

Connaissant la solution générale de : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = h(\omega, t)$ nous obtiendrons facilement l'effet de chacun des types de modulation.

8.2 - MOUVEMENT DE L'OSCILLATEUR PERTURBÉ

8.2.1 - Expression de l'élongation

La solution d'une équation du type :

$$(8.5) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

s'écrit sous la forme générale (avec des conditions initiales convenables) :

$$(8.6) \quad x = a \cos \omega_0 t + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + \frac{B}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

ou encore :

$$(8.7) \quad x = a \cos \omega_0 t + \frac{C}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos (\omega t + \phi_0)$$

avec :

$$(8.8) \quad \begin{cases} C^2 = A^2 + B^2 \\ \text{et } \operatorname{tg} \phi_0 = -\frac{B}{A} \end{cases}$$

Le second membre de x est ici la superposition du mouvement propre de l'oscillateur non perturbé tel qu'il a été calculé au chapitre 6 et des termes de perturbation introduits par les sources de bruit.

8.2.2 - Amplitude et phase de l'oscillateur perturbé

a) - Expression exacte :

En utilisant la définition (8.3) de ω , nous pouvons écrire x sous la forme :

$$(8.9) \quad x = a \cos \omega_0 t \mp \frac{C}{\Omega(2\omega_0 \pm \Omega)} \cos ((\omega_0 \pm \Omega)t + \phi_0)$$

En développant et en regroupant les différents termes, nous obtenons :

$$(8.10) \quad x = \left(a \mp \frac{C}{\Omega(2\omega_0 \pm \Omega)} \cos(\Omega t \pm \phi_0) \right) \cos \omega_0 t + \frac{C}{\Omega(2\omega_0 \pm \Omega)} \sin(\Omega t \pm \phi_0) \sin \omega_0 t$$

Cette expression permet de mettre x sous la forme :

$$(8.11) \quad x = X(t) \cos (\omega_0 t + \phi(t)) \quad \text{avec :}$$

$$(8.12) \quad X^2(t) = a^2 + \frac{C^2}{\Omega^2(2\omega_0 \pm \Omega)^2} \mp \frac{2aC}{\Omega(2\omega_0 \pm \Omega)} \cos (\Omega t \pm \phi_0) \quad \text{et}$$

$$(8.13) \quad \text{tg } \phi(t) = - \frac{C \sin(\Omega t \pm \phi_0)}{a \Omega(2\omega_0 \pm \Omega) \mp C \cos(\Omega t \pm \phi_0)}$$

b) - Expression approchée :

Les résultats (8.12) et (8.13) sont valables quel que soit Ω , mais à présent si nous voulons poursuivre l'étude, nous devons imposer certaines restrictions sur la fréquence d'excitation Ω . Nous avons déjà considéré que $\Omega \ll \omega_0$, pour un oscillateur à 5 MHz, les spectres étant rarement réalisés au-delà de 100 KHz de la porteuse, cette condition est pratiquement toujours remplie. Nous pouvons alors simplifier l'expression de l'amplitude et de la phase en écrivant :

$$(8.14) \quad X^2(t) = a^2 + \frac{C^2}{4\omega_0^2 \Omega^2} \mp \frac{aC}{\omega_0 \Omega} \cos (\Omega t \pm \phi_0) + O\left(\frac{C}{\omega_0^2}\right)$$

$$(8.15) \quad \text{tg } \phi(t) = - \frac{C \sin(\Omega t \pm \phi_0)}{2 a \Omega \omega_0 \mp C \cos(\Omega t \pm \phi_0)} + O\left(\frac{C}{\omega_0^2}\right)$$

Nous pouvons en outre exprimer C pour chaque type de modulation de façon à déterminer son ordre de grandeur. Pour cela, nous calculerons le rapport sans dimension $C/\omega_0 \Omega$ qui intervient dans (8.14) et (8.15).

En utilisant les définitions (8.8) et (8.4), nous avons :

- Pour la modulation à l'entrée :

$$(8.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} C^2 = C_e^2 = A_e^2 + B_e^2 \quad \text{d'où :} \\ \frac{C_e^2}{\omega_0^2 \Omega^2} = \frac{\sigma_0^2 \omega_0^2}{\Omega^2 Q^2} + \left(\sigma_1 \frac{\omega_0}{\Omega} \mp 2\sigma_0 \right)^2 + O\left(\frac{\sigma_1^2 \omega_0}{\Omega}\right) \end{array} \right.$$

- Pour la modulation à la sortie :

$$(8.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} C^2 = C_s^2 = (A_e + A_s)^2 + (B_e + B_s)^2 \quad \text{d'où :} \\ \frac{C_s^2}{\omega_0^2 \Omega^2} = \left(\frac{\sigma_0 \omega_0}{Q\Omega} \pm 2\sigma_s \right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 \omega_0}{\Omega} \mp 2\sigma_0 + \frac{\sigma_s \omega_0}{Q\Omega} \right)^2 + O\left(\frac{\sigma_1^2 \omega_0}{\Omega}\right) \end{array} \right.$$

L'étude de l'amplitude et de la phase ne présentera pas de difficulté si le rapport $C/\omega_0 \Omega$ reste beaucoup plus petit que 1. Si l'on se reporte aux valeurs numériques de σ_0 , σ_1 et σ_s (§§ 5.2.1 et 5.2.2) la condition :

$$(8.18) \quad \frac{C}{\omega_0 \Omega} \ll 1$$

est équivalente à :

$$\frac{\sigma_1 \omega_0}{\Omega} \approx \frac{\sigma_s \omega_0}{\Omega Q} \ll 1$$

ce qui est vérifié pour :

$$\Omega \gg 10^{-6} \text{ Hz}$$

Cette valeur étant hors de portée des analyseurs traditionnels, nous voyons ici que les conditions imposées à Ω ne sont pas excessivement restrictives et nous pourrions considérer qu'elles sont toujours remplies.

Si la condition (8.18) est vérifiée, nous pouvons écrire à présent, en négligeant les termes du second ordre :

$$(8.19) \quad X^2(t) = a^2 \mp \frac{aC}{\omega_0 \Omega} \cos(\Omega t \pm \phi_0) + O\left(\frac{C^2}{\omega_0^2 \Omega^2}\right) \quad \text{soit :}$$

$$(8.20) \quad \begin{cases} X(t) = a \mp \frac{C}{2\omega_0 \Omega} \cos(\Omega t \pm \phi_0) + O\left(\frac{C^2}{\omega_0^2 \Omega^2}\right) \\ \text{tg } \phi(t) \approx \phi(t) = -\frac{C}{2a\Omega\omega_0} \sin(\Omega t \pm \phi_0) + O\left(\frac{C^2}{\omega_0^2 \Omega^2}\right) \end{cases}$$

Si l'on désigne par $\alpha(t)$ les fluctuations d'amplitude autour de la valeur moyenne $a \approx 1$, nous obtenons les équations de perturbation :

$$(8.21) \quad \begin{cases} \alpha(t) = \mp \frac{C}{2\omega_0 \Omega} \cos(\Omega t \pm \phi_0) \\ \phi(t) = -\frac{C}{2\Omega\omega_0} \sin(\Omega t \pm \phi_0) \end{cases}$$

8.2.3 - Utilisation de la méthode de la moyenne

Nous nous proposons de montrer, dans ce paragraphe, qu'il est possible d'utiliser la méthode de la moyenne pour obtenir l'expression des fluctuations d'amplitude et de phase de l'oscillateur perturbé.

Comme nous l'avons vu au § 8.1, le problème consiste à résoudre une équation du type :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad \text{cf. (8.5)}$$

avec $\omega = \omega_0 \pm \Omega$ cf. (8.3)

Le paramètre petit, indispensable à l'utilisation de la méthode de la moyenne étant ici contenu dans les coefficients A et B (cf. relations (8.4), (5.24) et (5.32)), nous pouvons mettre (8.5) sous la forme :

$$(8.22) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \sigma (A' \cos \omega t + B' \sin \omega t)$$

avec $A = \sigma A'$, $B = \sigma B'$ et σ pouvant être l'un des paramètres σ_0 , σ_1 ou σ_s .

La relation (8.22) est alors du type (6.21) avec :

$$(8.23) \quad S(x, \dot{x}, t) = A' \cos(\omega_0 \pm \Omega)t + B' \sin(\omega_0 \pm \Omega)t = S(a, \phi, t)$$

Le vecteur $f(u, t)$ défini par (6.30) s'écrit ici :

$$(8.24) \quad f(u, t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega_0} (A' \cos(\omega_0 \pm \Omega)t + B' \sin(\omega_0 \pm \Omega)t) \sin(\omega_0 t + \phi) \\ -\frac{1}{a\omega_0} (A' \cos(\omega_0 \pm \Omega)t + B' \sin(\omega_0 \pm \Omega)t) \cos(\omega_0 t + \phi) \end{pmatrix}$$

Comme nous n'effectuerons le calcul qu'en première approximation, il suffira de donner le premier terme $\bar{f}(u,t)$ de la décomposition (6.6) c'est-à-dire celui qui contient les fonctions lentement variables en Ωt (cf. annexe 8.1) :

$$(8.25) \quad \bar{f}(u,t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\omega_0} (\mp A' \sin(\Omega t \mp \phi) + B' \cos(\Omega t \mp \phi)) \\ -\frac{1}{2a\omega_0} (A' \cos(\Omega t \mp \phi) \pm B' \sin(\Omega t \mp \phi)) \end{pmatrix}$$

Le système associé (6.2) s'écrit par conséquent dans le cas particulier qui nous intéresse :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \sigma F(y) \quad \text{avec} \quad y = \begin{pmatrix} a \\ \phi \end{pmatrix} + O(\sigma) \quad \text{et} \\ F(y) &= F_1 + O(\sigma) = \bar{f}(y,t) + O(\sigma) \quad \text{cf. (6.20)} \end{aligned}$$

En première approximation, nous avons donc le système :

$$(8.26) \quad \begin{cases} \dot{a} = -\frac{\sigma}{2\omega_0} (\mp A' \sin(\Omega t \mp \phi) + B' \cos(\Omega t \mp \phi)) + O(\sigma^2) \\ \dot{\phi} = -\frac{\sigma}{2a\omega_0} (A' \cos(\Omega t \mp \phi) \pm B' \sin(\Omega t \mp \phi)) + O(\sigma^2) \end{cases}$$

L'intégration de ce système sera simple si les fluctuations d'amplitude et de phase restent très petites c'est-à-dire à condition que l'indice de modulation reste lui-même très petit (cf. § 3.2.4) ce qui sera le cas lorsque :

$$(8.27) \quad \frac{\sigma A'}{\omega_0 \Omega} \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma B'}{\omega_0 \Omega} \ll 1 \quad \begin{aligned} &\text{conditions que l'on peut comparer} \\ &\text{à (8.18) puisque } C^2 = A^2 + B^2 \text{ et} \\ &\sigma A' = A; \quad \sigma B' = B. \end{aligned}$$

Nous pouvons dans ce cas simplifier le système (8.26) qui devient, en désignant par $\alpha(t)$ les fluctuations d'amplitude (cf. § 8.2)

$$a(t) = 1 + \alpha(t)$$

$$(8.28) \quad \begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{\sigma}{2\omega_0} (\mp A' \sin \Omega t + B' \cos \Omega t) \\ \dot{\phi} = -\frac{\sigma}{2\omega_0} (A' \cos \Omega t \pm B' \sin \Omega t) \end{cases}$$

α étant de l'ordre de grandeur de σ grâce à la condition (8.27), α peut être remplacé par 1 dans le dénominateur de $\dot{\phi}$, les termes négligés étant du second ordre.

L'intégration de (8.28) est alors immédiate :

$$(8.29) \quad \begin{cases} \alpha = - \frac{\sigma}{2\omega_0 \Omega} (\pm A' \cos \Omega t + B' \sin \Omega t) \\ \phi = - \frac{\sigma}{2\omega_0 \Omega} (A' \sin \Omega t \mp B' \cos \Omega t) \end{cases}$$

et l'on obtient un résultat identique à (8.21) en appliquant les définitions (8.8).

8.3 - SPECTRES DES PERTURBATIONS

Nous avons vu au § 3.3 que la densité spectrale de puissance à fréquences positives de fonctions du type (8.21) s'écrit :

$$(8.30) \quad S_{\alpha}(\omega \geq 0) = S_{\phi}(\omega \geq 0) = \frac{C^2}{8 \omega_0^2 \Omega^2} \cdot 2\pi \delta(\omega - \Omega) \quad \text{cf. figure 3.2}$$

ω étant ici la fréquence de Fourier et Ω la fréquence d'excitation $S_{\alpha}(\omega \geq 0)$ et $S_{\phi}(\omega \geq 0)$ s'exprime par la même fonction et dans la même unité (Hz^{-1}) car il s'agit des fluctuations relatives d'amplitude et de phase.

Nous allons à présent exprimer la répartition spectrale de puissance de $\phi(t)$ ou $\alpha(t)$, c'est-à-dire l'enveloppe des raies de modulation en fonction de la fréquence Ω (cf. § 3.3) telle qu'elle peut être obtenue expérimentalement en introduisant un générateur harmonique de fréquence variable Ω autour de ω_0 à la place des sources de bruit (cf. § 5.2). Il suffira d'étudier le comportement de la phase et d'appliquer la relation (8.30) pour obtenir le spectre d'amplitude.

Analytiquement, nous pouvons exprimer l'enveloppe des raies de modulation que nous appellerons spectre de phase : $S_{\phi}(\Omega \geq 0)$ par la fonction :

$$(8.31) \quad S_{\phi}(\Omega \geq 0) = \frac{C^2}{8 \omega_0^2 \Omega^2}$$

8.4 - MODULATION A L'ENTREE

8.4.1 - Expression du spectre de phase

$S_{\phi_e}(F \geq 0)$ avec $\Omega = 2\pi F$ est obtenue en remplaçant dans (8.31), C^2 par sa valeur (8.16) ce qui donne :

$$(8.32) \quad S_{\phi_e}(F \geq 0) = \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma_0^2 f_0^2}{F^2 Q^2} + \left(\sigma_1 \frac{f_0}{F} \mp 2\sigma_0 \right)^2 \right)$$

Rappelons ici que le signe supérieur doit être utilisé lorsque la fréquence d'excitation est plus grande que f_0 et le signe inférieur lorsqu'elle est plus petite.

La relation (8.32) peut également se mettre sous la forme :

(cf. (5.24))

$$(8.33) \quad S_{\phi_e}(F \geq 0) = \frac{\sigma_1^2}{8} \left(\frac{C_0^2}{C_1^2 Q^2} \frac{f_0^2}{F^2} + \left(\frac{f_0}{F} \mp 2 \frac{C_0}{C_1} \right)^2 \right)$$

Les spectres étant le plus souvent exprimés en décibels nous mettrons S_{ϕ} sous la forme :

$$(8.34) \quad S_{\phi_{dB}}(F \geq 0) = 10 \log \left(\frac{C_0^2 f_0^2}{C_1^2 Q^2 F^2} + \left(\frac{f_0}{F} \mp 2 \frac{C_0}{C_1} \right)^2 \right) - 10 \log f_0^2$$

le niveau de référence étant ici arbitrairement choisi de telle sorte que :

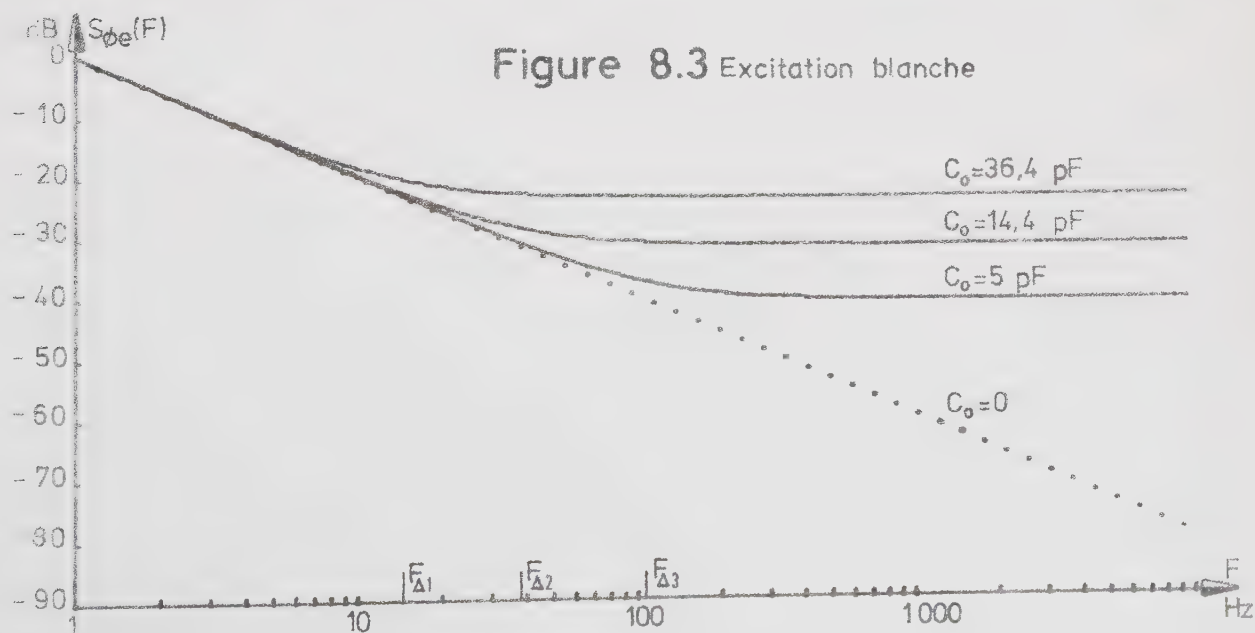
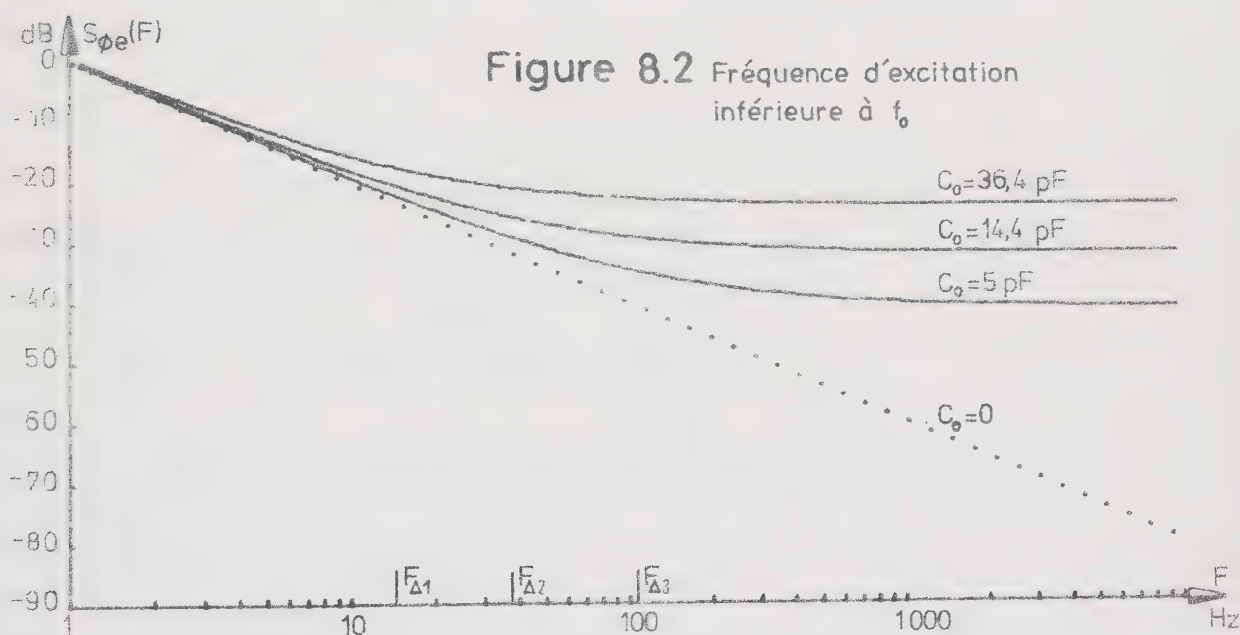
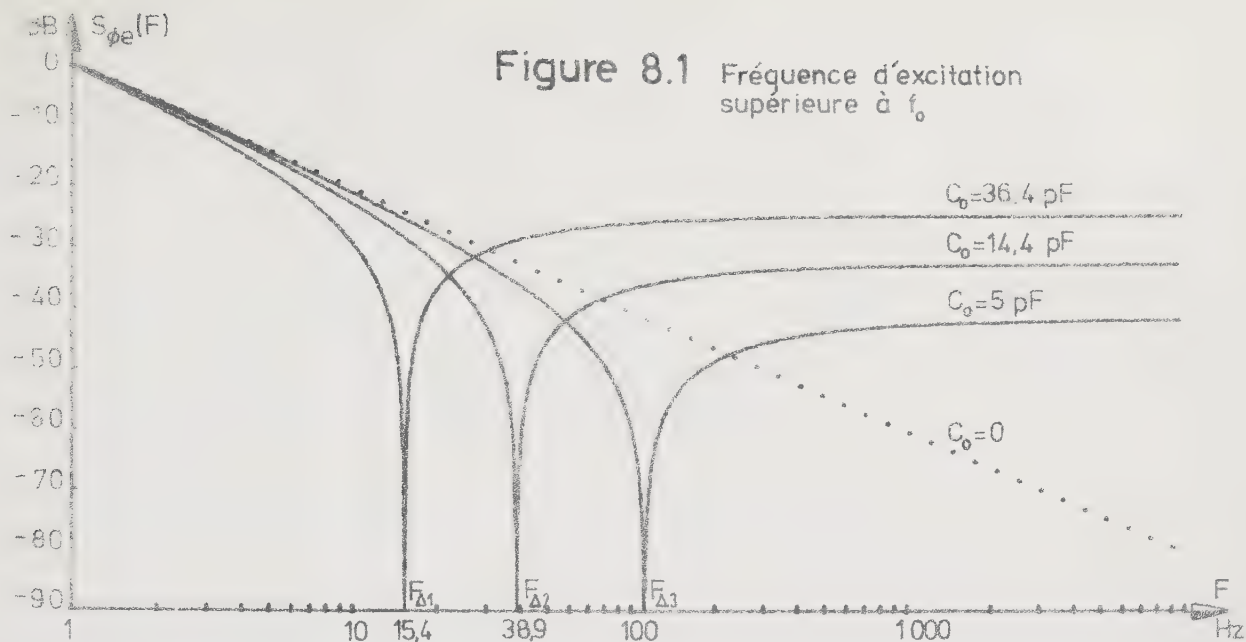
$$(8.35) \quad S_{\phi_{dB}}(F = 1 \text{ Hz}, C_0 = 0) = 0$$

8.4.2 - Cas où $C_0 = 0$

Si l'on ne tient pas compte de la capacité parallèle, nous obtenons le spectre suivant :

$$(8.36) \quad S_{\phi_e}(F \geq 0, C_0 = 0) = \frac{\sigma_1^2}{8} \frac{f_0^2}{F^2}$$

c'est-à-dire le spectre de phase classique du bruit interne en $\frac{1}{F^2}$ (figure 8.1).



8.4.3 - Cas où $C_0 \neq 0$

a) - Fréquences d'excitation supérieures à f_0 :

La figure 8.1 montre l'allure du spectre obtenu pour différentes valeurs de C_0 , nous constatons un pic d'absorption pour une certaine fréquence F_Δ , cette fréquence correspond à la valeur de F pour laquelle (8.33) est minimale c'est-à-dire pour :

$$(8.37) \quad \frac{f_0}{F} - 2 \frac{C_0}{C_1} = 0 \quad \rightarrow \quad F_\Delta = \frac{f_0 C_1}{2C_0}$$

Si l'on se reporte au § 4.2, nous voyons que cette absorption a lieu lorsque F est égale à la différence entre les fréquences de résonance série et parallèle (relation (4.24)).

b) - Fréquences d'excitation inférieures à f_0 :

Pour les mêmes valeurs de C_0 que dans le cas précédent, la figure 8.2 montre que les spectres obtenus sont constitués de deux parties. Asymptotiquement, lorsque F devient très petit :

$$(8.38) \quad S_{\phi_e}(F \gg 0) \sim \frac{\sigma_1^2 f_0^2}{8 F^2} \left(1 + \frac{C_0^2}{Q^2 C_1^2} \right)$$

le spectre reprend la forme classique en $\frac{1}{F^2}$, par contre lorsque F devient très grand :

$$(8.39) \quad S_{\phi_e}(F \gg 0) \sim \frac{\sigma_1^2 C_0^2}{2 C_1^2}$$

nous obtenons un spectre plat ; la fréquence de coupure entre ces deux comportements étant d'ailleurs égale à F_Δ .

c) - Bruit blanc :

Comme nous l'avons expliqué au § 3.4.3, nous pouvons obtenir le spectre de l'oscillateur soumis à un bruit blanc à l'entrée, en étudiant l'enveloppe des raies de modulation produites par une source harmonique. Il suffit pour cela de considérer que pour un bruit blanc, toutes les fréquences d'excitation sont simultanément présentes : le spectre du signal de sortie sera obtenu simplement en superposant les courbes obtenues dans les deux cas précédents, ce qui donne, avec le même niveau de référence (8.35) :

$$(8.40) \quad S_{\phi_e \text{ dB}} (F \geq 0) = 10 \log \left(\frac{C_0^2 f_0^2}{C_1^2 Q^2 F^2} + \frac{f_0^2}{F^2} + 4 \frac{C_0^2}{C_1^2} \right) - 10 \log f_0^2$$

Cette courbe représentée figure 8.3 diffère simplement de la précédente par une courbure un peu plus accentuée à la fréquence de coupure F_Δ .

8.5.- MODULATION A LA SORTIE

8.5.1 - Spectre de phase

Comme précédemment, nous obtiendrons $S_{\phi_s}(F \geq 0)$ en remplaçant C^2 par sa valeur (8.17) dans (8.31) :

$$(8.41) \quad S_{\phi_s} (F \geq 0) = \frac{1}{8} \left\{ \left(\frac{\sigma_0 f_0}{Q F} \pm 2\sigma_s \right)^2 + \left(\left(\sigma_1 + \frac{\sigma_s}{Q} \right) \frac{f_0}{F} \mp 2\sigma_0 \right)^2 \right\}$$

En développant (8.41) et en comparant les ordres de grandeur, nous pouvons encore mettre cette relation sous la forme :

$$(8.42) \quad S_{\phi_s} (F \geq 0) = \frac{\sigma_s^2}{8} \left(\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_s} + \frac{1}{Q} \right)^2 \frac{f_0^2}{F^2} \mp \frac{4 \sigma_0 \sigma_1}{\sigma_s^2 Q} \frac{f_0}{F} + 4 \right)$$

Si nous reprenons les définitions (5.24) et (5.32) de σ_1 , σ_0 et σ_s nous voyons que :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_s} + \frac{1}{Q} = \omega_0 C_1 (R_1 + R_2) = \frac{1}{Q_C}$$

Q_C étant le coefficient de qualité en charge du résonateur.

Nous pouvons alors écrire la relation (8.42) de la façon suivante :

$$(8.43) \quad S_{\phi_s} (F \geq 0) = \frac{\sigma_s^2}{8 Q_C^2} \left(\frac{f_0^2}{F^2} \mp \frac{4 C_0 R_2^2}{C_1 Q (R_1 + R_2)^2} \frac{f_0}{F} + 4 Q_C^2 \right)$$

où :

$$(8.44) \quad \frac{\sigma_s}{Q_C} = \sigma_2 = \omega_0 C_1 (R_1 + R_2) R_3 \frac{I_s}{V_0} \quad \text{que l'on peut comparer à } \sigma_1 \quad (\text{cf. (5.24)}) \text{ car :}$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}.$$

En prenant le même niveau de référence que précédemment, nous obtenons $S_{\phi_s \text{ dB}}$:

$$(8.45) \quad S_{\phi_s \text{ dB}}(F \geq 0) = 10 \log \left(\frac{f_o^2}{F^2} + 4 \frac{C_o}{C_1} \frac{R_2^2}{Q(R_1 + R_2)^2} \frac{f_o}{F} + 4 Q_C^2 \right) + 10 \log \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2} - 10 \log f_o^2$$

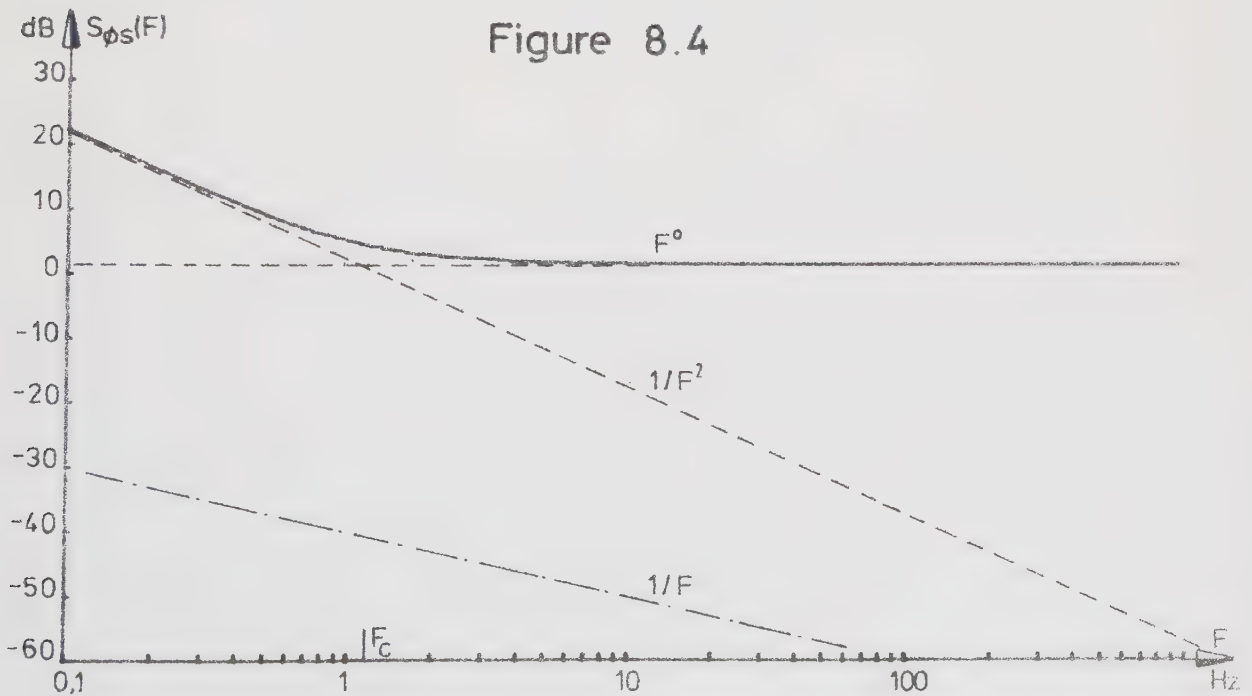
8.5.2 - Cas où $C_o = 0$

Dans le cas où la capacité parallèle n'existe pas, nous obtenons :

$$(8.46) \quad S_{\phi_s}(F \geq 0), C_o = 0 = \frac{\sigma_2^2}{8} \left(\frac{f_o^2}{F^2} + 4 Q_C^2 \right)$$

nous trouvons par conséquent l'expression analytique du spectre de phase du bruit externe (figure 8.4) constitué de deux parties, l'une en $\frac{1}{F^2}$, l'autre constante avec une fréquence de coupure F_c définie par :

$$(8.47) \quad \frac{f_o^2}{F^2} = 4 Q_C^2 \rightarrow F_c = \frac{f_o}{2 Q_C}$$



8.5.3 - Cas où $C_0 \neq 0$, bruit blanc

Contrairement au cas de la modulation à l'entrée, la présence de C_0 ne modifie pas le spectre de phase, en effet, la seule partie de S_{ϕ_s} contenant C_0 est toujours masquée soit par la partie en $1/F^2$, soit par la partie constante (figure 8.4).

Le spectre de phase de l'oscillateur soumis à un bruit blanc à la sortie aura la même allure que celui décrit sur la figure 8.4, il est défini par :

$$(8.48) \quad S_{\phi_s \text{ dB}}(F \geq 0) = 10 \log \left(\frac{f_0^2}{F^2} + 4 Q_C^2 \right) - 10 \log f_0^2 + 10 \log \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2}$$

8.5.4 - Effet global des sources de bruit

Lorsque l'oscillateur est perturbé par deux sources de bruit thermique non corrélées ayant sensiblement le même niveau, l'une placée à l'entrée l'autre à la sortie (figure 5.3), le spectre des fluctuations de phase est obtenu par la superposition des spectres (8.40) et (8.48). Nous nous apercevons alors que le spectre dû au bruit placé à la sortie est toujours prédominant puisqu'au minimum il est à $10 \log (R_1 + R_2)^2 / R_1^2 \approx 10 \text{ dB}$ au-dessus du spectre dû au bruit placé à l'entrée.

TROISIÈME PARTIE

CHAPITRE 9

METHODES EXPERIMENTALESCOMPARAISON ENTRE LES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

Le neuvième chapitre est consacré à la description des montages expérimentaux qui ont permis de vérifier la théorie exposée précédemment.

La comparaison entre les résultats théoriques et expérimentaux achève cette dernière partie.

9.1 - DETERMINATION DES PARAMETRES DU QUARTZ

Le dispositif employé pour la détermination expérimentale des paramètres du quartz utilise la méthode de la largeur de bande (30, 34) dont le principe est rappelé sur la figure 9.1. Le voltmètre vectoriel permet de déterminer l'amplitude des signaux en M et N ainsi que leur déphasage relatif. Les valeurs numériques de ces paramètres ont été données au chapitre 4, et sont rappelées au § 9.1.3 ci-dessous.

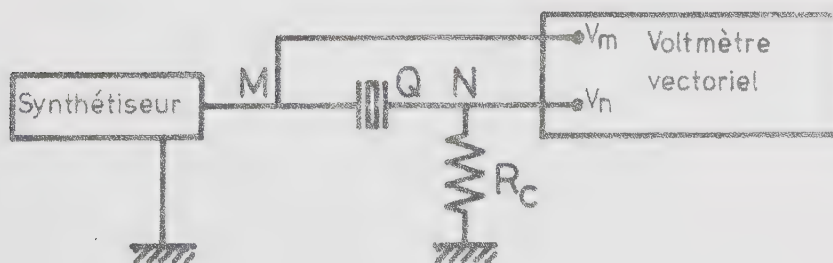


Figure 9.1

9.1.1 - Détermination de la résistance R_1

La fréquence du synthétiseur étant réglée à la résonance série f_0 du quartz, le déphasage entre les points M et N est nul et l'amplitude en N est maximale. Dans cette expérience on néglige l'influence de C_0 , l'impédance du quartz est alors celle de la résistance série R_1 (cf. (4.2)₁), connaissant R_c , R_1 peut être déterminée par la relation :

$$(9.1) \quad R_1 = R_c \frac{(V_m - V_n)}{V_n}$$

9.1.2 - Détermination des autres paramètres du quartz

a) - Coefficient de surtension :

Le montage précédent permet de déterminer les fréquences quadrantes du quartz c'est-à-dire celles pour lesquelles le déphasage entre les points M et N est égal à $\pm 45^\circ$. La différence entre ces deux fréquences définit la largeur de bande en charge du résonateur Δf et le coefficient du surtension en charge Q_c s'obtient alors par la relation :

$$(9.2) \quad Q_c = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{L_1 \omega_0}{R_1 + R_c}$$

La comparaison de cette expression avec (4.4.d) permet de déterminer le coefficient de surtension à vide :

$$(9.3) \quad Q = \frac{R_1 + R_c}{R_1} Q_c$$

b) - Self et capacité série :

La relation (9.2) permet de calculer L_1 :

$$(9.4) \quad L_1 = \frac{R_1 + R_c}{\Delta \omega} \quad \text{avec} \quad \Delta \omega = 2 \pi \Delta f$$

et C_1 est obtenu grâce à la relation (4.4.a) :

$$(9.5) \quad C_1 = \frac{1}{L_1 \omega_0^2}$$

a) - Capacité parallèle :

Le montage de la figure 9.1 permet de déterminer la fréquence d'antirésonance du circuit parallèle : f_p (le déphasage entre M et N est nul pour une amplitude en N minimale) il est alors possible de calculer ω_d^2 par la relation (4.4.b) et C_o par (4.4.c) :

$$(9.6) \quad C_o = \frac{1}{L_1 \omega_d^2} \quad \text{avec} \quad \omega_d^2 = \omega_p^2 - \omega_o^2$$

d) - Puissance d'excitation :

Elle est déterminée lorsque les tensions V_m et V_n et la résistance R_1 sont connues :

$$(9.7) \quad P_{ex} = \frac{(V_m - V_n)^2}{R_1}$$

Pour l'oscillateur à 5 MHz utilisé, cette puissance est de l'ordre de 50 μ W.

9.1.3 - Valeurs numériques des paramètres du quartz

a) - Quartz à 5 MHz partiel 5 à la température ambiante :

Fréquence de résonance $f_o \approx 5\,000\,200$ Hz

Résistance série $R_1 \approx 77,4 \, \Omega$

Self équivalente série $L_1 \approx 5$ H

Capacité série $C_1 \approx 2 \cdot 10^{-4}$ pF

Capacité parallèle $C_o \approx 2$ pF

Coefficient de qualité à vide : $Q \approx 2 \cdot 10^6$

b) - Quartz à 100 MHz partiel 5 à la température ambiante :

$f_o \approx 100\,000\,300$ Hz

$Q \approx 40\,000$

$R_1 \approx 68 \, \Omega$

$L_1 \approx 4,3$ mH

$C_1 \approx 5,8 \cdot 10^{-4}$ pF

$C_o \approx 2$ pF

9.2.2 - Oscillateur à 100 MHz

L'oscillateur à 100 MHz comporte trois transistors, il a également fait l'objet d'une récente communication (52, 53).

La figure 9.3 montre le schéma du montage :

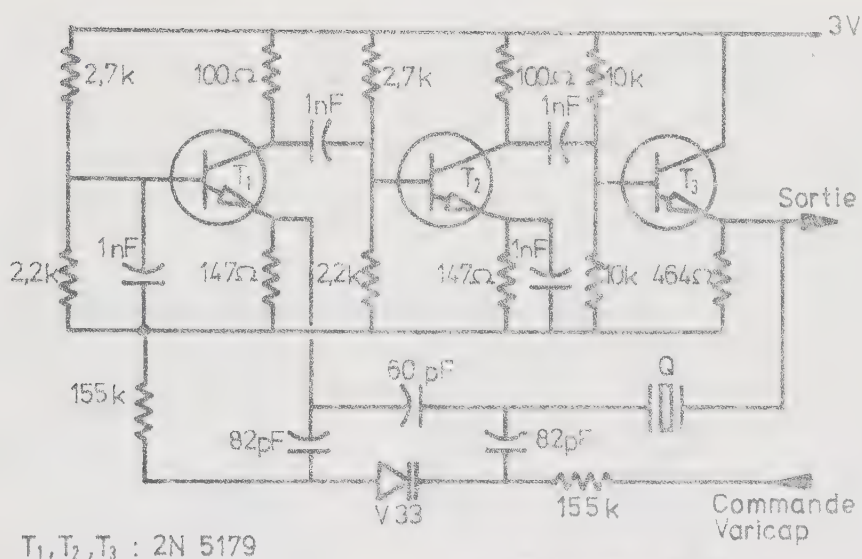


Figure 9.3

Cet oscillateur est sensiblement construit sur le même principe que le précédent, le transistor intermédiaire T_2 (émetteur commun) permet de rattraper les déphasages introduits en haute fréquence par les montages base commune T_1 et collecteur commun T_3 . Ce transistor peut d'ailleurs être remplacé par une bobine.

9.3 - DETERMINATION DES CARACTERISTIQUES DE L'OSCILLATEUR A 5 MHz

Pour déterminer les caractéristiques de l'amplificateur de bouclage il est indispensable d'opérer les mesures en boucle ouverte. L'amplificateur devant être placé dans les mêmes conditions que pendant le fonctionnement normal, nous avons été amené à effectuer le montage représenté sur la figure 9.4 :

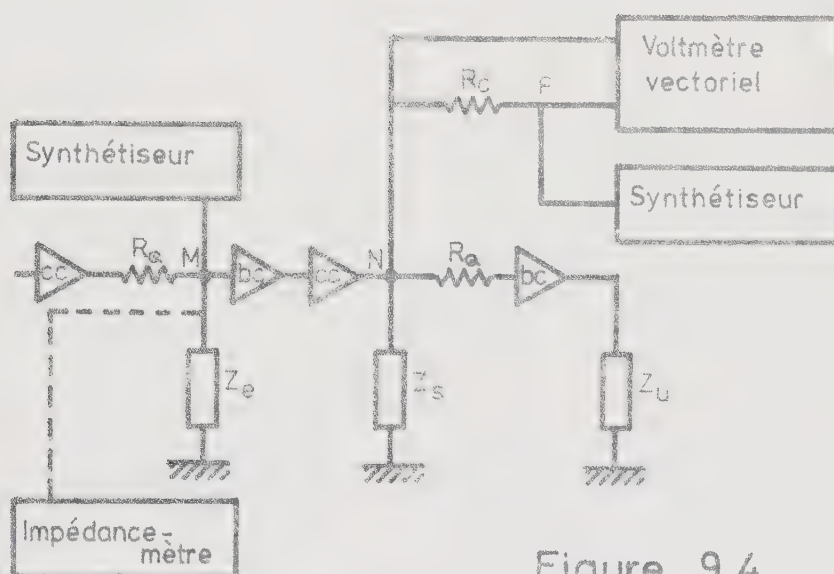


Figure 9.4

Le quartz étant retiré, il faut que l'impédance vue par l'amplificateur soit la même que dans le montage en boucle fermée, c'est pourquoi la sortie est chargée par une résistance R_Q équivalente à celle du quartz à la résonance en série avec un transistor monté en base commune (bc) identique au premier étage de l'amplificateur.

De même, l'entrée voit la résistance R_Q en série avec un transistor monté en collecteur commun (cc) identique au second étage de l'amplificateur.

9.3.1 - Mesure du gain

Un synthétiseur permet d'obtenir la courbe de gain en fonction du niveau d'entrée V_m :

$$(9.8) \quad G_v(V_m) = \frac{V_m}{V_n}$$

9.3.2 - Impédances d'entrée et de sortie

L'impédance d'entrée est mesurée directement à l'aide d'un impédancemètre placé en M. Une valeur typique de cette impédance pour l'oscillateur utilisé est $Z_e = 32 \Omega$.

Pour obtenir la courbe donnant l'impédance de sortie en fonction du niveau d'entrée on détermine la tension V_n correspondant à une valeur de V_m déterminée sur la courbe de gain, on règle alors la tension V_p du synthétiseur placé en P pour obtenir la même valeur de V_n . Pour la valeur de V_m considérée on calcule alors l'impédance de sortie Z_s :

$$(9.9) \quad Z_s(V_m) = R_c \frac{V_n}{V_p - V_n}$$

En fonctionnement normal cette impédance est environ :
 $Z_s = 28 \Omega$.

9.3.3 - Transconductance de l'amplificateur

Comme nous l'avons vu, la transconductance de l'amplificateur de bouclage est donnée par la relation :

$$(9.10) \quad g_m(V_m) = \frac{G_v(V_m)}{Z_s(V_m)} \quad (\text{cf. § 1.5.3})$$

Pour l'oscillateur considéré, la courbe de transconductance a été donnée au chapitre 5 (figure 5.2).

9.4 - MESURE DES SPECTRES

9.4.1 - Principe de la mesure des spectres de phase et de fréquence

La mesure du spectre des fluctuations de phase et de fréquence d'un oscillateur nécessite l'emploi d'un oscillateur de référence pouvant être asservi sur l'oscillateur à tester, l'asservissement étant généralement réalisé grâce à une varicap en série avec le quartz (cf. figures 9.2, 9.3). Le principe de la mesure est représenté figure 9.5.

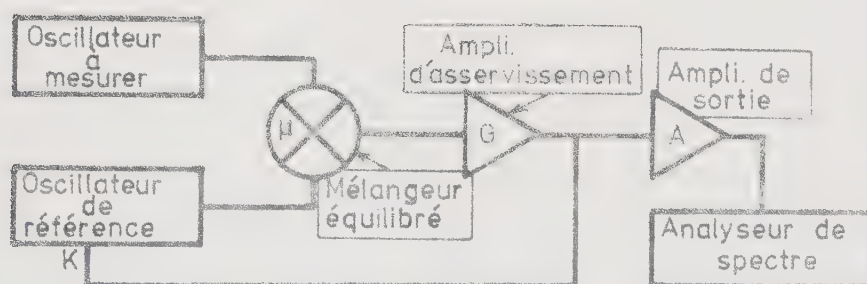


Figure 9.5

Un mélangeur équilibré est attaqué simultanément par les deux signaux, les fluctuations de phase recueillies à la sortie sont amplifiées par un amplificateur G faible bruit et réinjectées sur la varicap de l'oscillateur de référence.

L'asservissement de l'oscillateur de référence est caractérisé par :

- La pente K de la varicap exprimée en Hz/V.
- La sensibilité μ du mélangeur équilibré exprimée en V/rad.
- Le gain G de l'amplificateur faible bruit de l'asservissement.

Ces trois données permettent de définir la fréquence de coupure de l'asservissement (54) :

$$(9.11) \quad \Omega_c = K \cdot G \cdot \mu$$

Les fluctuations issues de G sont alors amplifiées et analysées.

Lorsque la fréquence de la composante analysée est inférieure à la fréquence de coupure de l'asservissement, le spectre du signal issu de l'ampli A est proportionnel au spectre des fluctuations de fréquence de l'oscillateur mesuré (si l'on considère l'oscillateur de référence comme parfait).

Pour les fréquences supérieures à la fréquence de coupure, le spectre du signal de sortie est proportionnel au spectre des fluctuations de phase.

Il est possible naturellement d'obtenir le spectre de phase pour toutes les fréquences en utilisant la relation (3.38).

9.4.2 - Dispositif expérimental

Pour déterminer la forme du spectre de phase du bruit interne et étudier l'influence de la capacité parallèle, l'oscillateur est perturbé par un signal de fréquence voisine de f_0 (cf. § 5.2.1). L'oscillateur de référence étant ici un synthétiseur (figure 9.6).

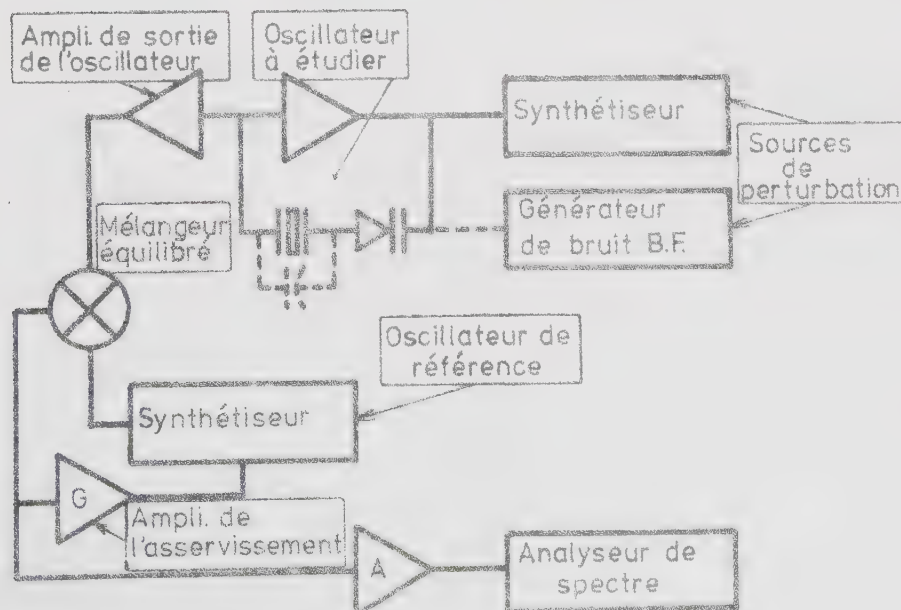


Figure 9.6

Dans l'expérience considérée, le niveau d'excitation est d'environ 4 mV efficace c'est-à-dire 30 dB en-dessous du niveau d'oscillation.

Nous avons expliqué au § 8.5.4 que le spectre des sources de bruit placées à la sortie de l'oscillateur masquait la forme du spectre des sources de bruit placées à l'entrée. Pour faire apparaître la forme de ces spectres nous avons dû imposer un niveau d'excitation d'environ 130 dB au-dessus du bruit thermique naturel (cf. § 5.2.1), ce qui nous a permis d'utiliser un synthétiseur comme oscillateur de référence.

Les autres caractéristiques du dispositif expérimental sont les suivantes :

- Capacité parallèle $C_c \approx 5$ pF (capacité naturelle), 14,4 pF et 36,4 pF.
- Gain de la boucle d'asservissement : $G = 1000$.
- Sensibilité du mélangeur équilibré : $\mu = 250$ mV/rad.
- Pente de l'accord électronique du synthétiseur de référence : $K = 20$ Hz/V.

La fréquence de coupure de l'asservissement est ainsi fixée à environ 1 500 Hz.

L'analyseur de spectre a une largeur de filtre de 3 Hz, ce qui permet d'obtenir le spectre de fréquence puis le spectre de phase de quelques Hz à quelques KHz.

9.4.3 - Spectres d'amplitude

Le spectre des fluctuations d'amplitude est obtenu simplement en analysant le signal de sortie d'un détecteur attaqué par l'oscillateur perturbé (figure 9.7).

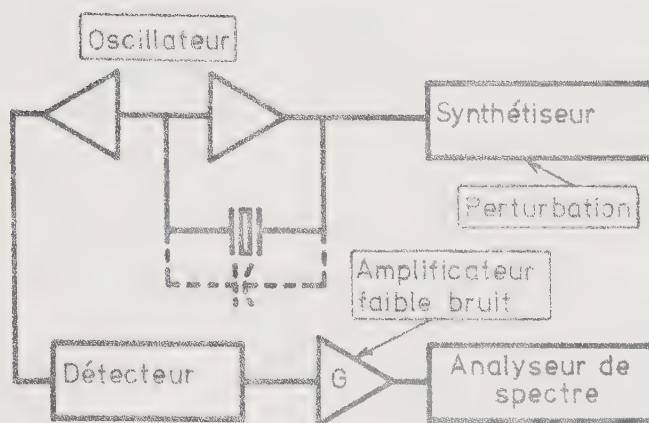


Figure 9.7

9.4.4 - Excitation aléatoire

Pour obtenir le spectre des fluctuations de phase dues à une excitation aléatoire blanche, il est indispensable de disposer d'une source de bruit dont le spectre est blanc autour de la fréquence de l'oscillateur. Ne disposant pas d'un tel appareillage, nous avons translaté le spectre d'une source de bruit basse fréquence autour de la porteuse en la branchant sur la varicap en série avec le résonateur (figures 9.2 et 9.6). La source de bruit utilisée dans cette expérience est un générateur de signaux pseudo-aléatoires.

9.5 - REMARQUES CONCERNANT LE NEUTRODYNAGE DE LA CAPACITE PARALLELE

9.5.1 - Neutrodynage par self

Afin de contrecarrer l'effet de la capacité parallèle sur la forme du spectre du bruit interne il est possible de placer une self L_0 en parallèle sur C_0 . L'étude théorique d'un tel dispositif présente un certain nombre de difficultés, notamment l'introduction de cette self

conduit à une équation différentielle du quatrième ordre (qu'il est cependant possible d'étudier à l'aide des méthodes présentées dans la seconde partie).

Nous allons exposer simplement dans ce paragraphe l'influence d'une self parallèle sur la courbe de réponse phase-fréquence du résonateur et montrer qu'il existe une valeur de L_0 pour laquelle l'influence de C_0 est minimale.

Considérons le schéma équivalent du résonateur représenté sur la figure 9.8 et dans lequel nous négligeons la résistance série R_1 qui ne fait que modifier la forme de la réponse phase-fréquence mais n'a que peu d'influence sur les fréquences caractéristiques du montage :

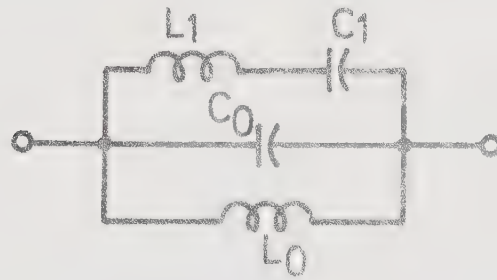


Figure 9.8

L'impédance présentée par un tel dipôle a pour expression (cf. § 4.2 pour les notations) :

$$(9.12) \quad Z_L = \frac{p (p^2 + 1/L_1 C_1)}{C_0 (p^4 + p^2 (\frac{1}{L_1 C_0} + \frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_0 C_0}) + \frac{1}{L_1 C_1 C_0 L_0})}$$

dans laquelle apparaît une nouvelle fréquence caractéristique :

$$(9.13) \quad \omega_L^2 = \frac{1}{L_0 C_0}$$

A l'aide des notations (4.4) et (9.13) l'impédance Z_L prend la forme suivante :

$$(9.14) \quad Z_L = \frac{p (p^2 + \omega_0^2)}{C_0 (p^4 + p^2 (\omega_p^2 + \omega_L^2) + \omega_0^2 \omega_L^2)}$$

Les résonances de ce dipôle sont données par les zéros de Z_L , les antirésonances par les pôles ; les pôles et les zéros étant entrelacés (55).

Nous trouvons naturellement ω_0 comme fréquence de résonance, les fréquences d'antirésonance étant les solutions de l'équation :

$$(9.15) \quad \omega^4 - \omega^2 (\omega_p^2 + \omega_L^2) + \omega_0^2 \omega_L^2 = 0$$

ou en notations réduites (cf. (4.17)) :

$$(9.16) \quad u^4 - u^2 (u_p^2 + u_L^2) + u_0^2 u_L^2 = 0$$

L'équation (9.15) admet deux racines positives situées de part et d'autre de la valeur ω_0^2 (cf. annexe 9.1). La forme de la courbe de réponse phase-fréquence est représentée sur la figure 9.9.

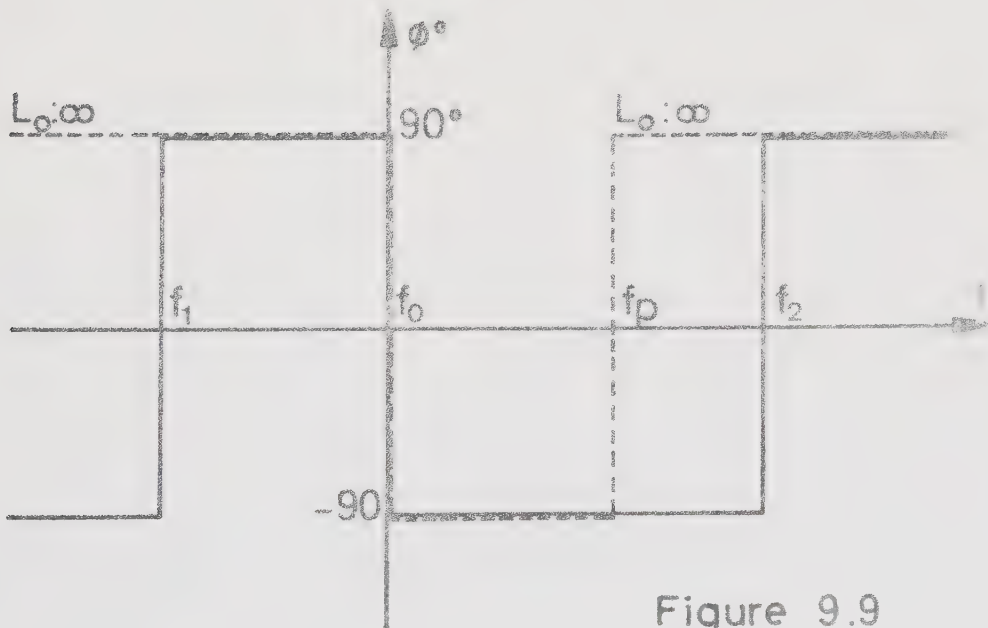


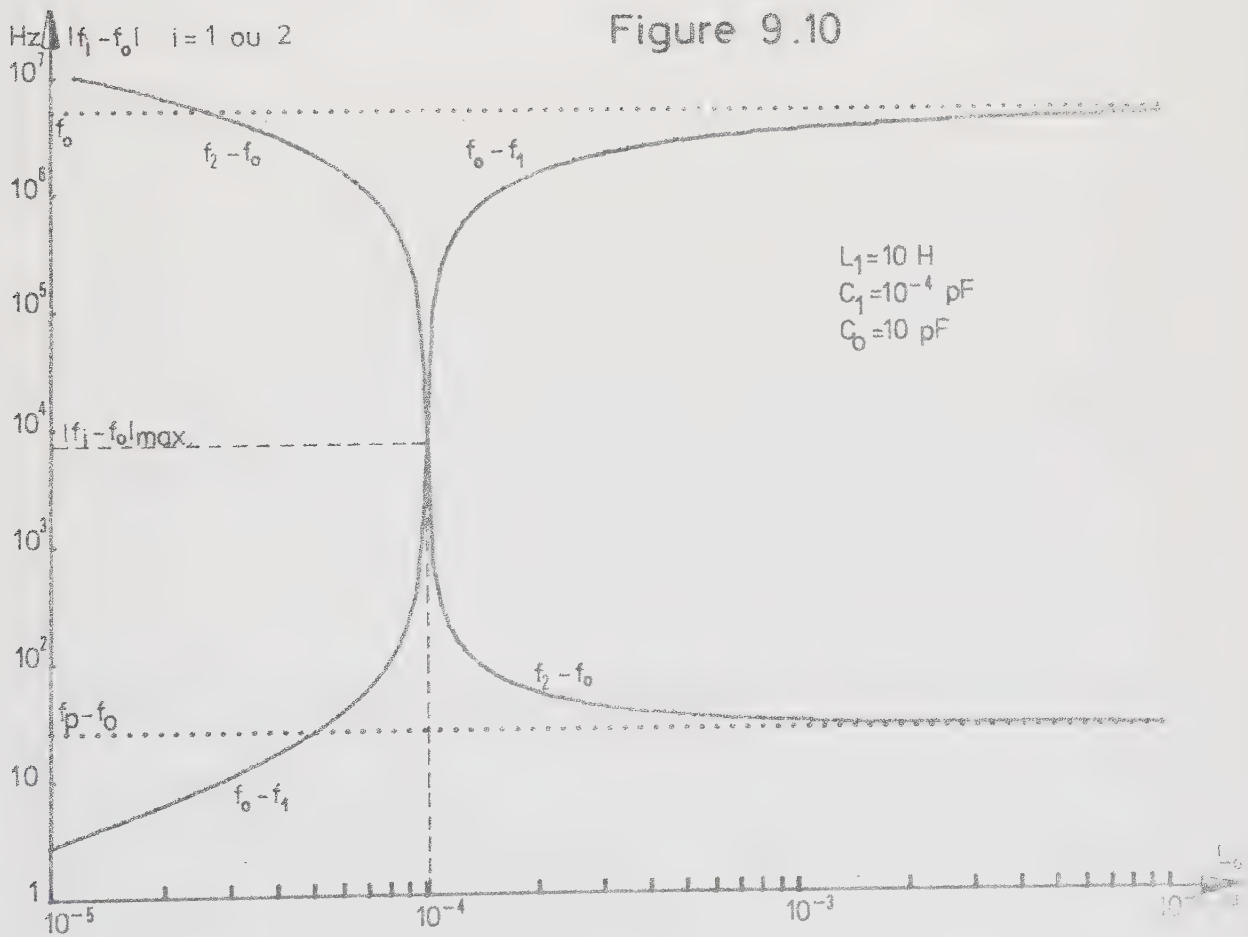
Figure 9.9

Lorsque L_0 varie de zéro à l'infini, l'antirésonance f_1 varie de f_0 à zéro tandis que l'antirésonance f_2 varie de l'infini à f_p .

La figure 9.10 montre l'évolution des différences $f_0 - f_1$ et $f_2 - f_0$ lorsque L_0 varie entre 0 et l'infini. La valeur absolue de l'écart $|f_i - f_0|$ ($i = 1$ ou 2) est maximale lorsque $f_0 - f_1 = f_2 - f_0$ ce qui a lieu pour une valeur $L_0 \approx L_1 \cdot C_1/C_0$ de l'ordre de 0,1 mH pour un résonateur à 5 MHz, cette valeur de L_0 correspond au cas où $\omega_L = \omega_0$. L'écart $|f_i - f_0|_{\text{Max}}$ correspondant est alors égal à :

$$(9.17) \quad |f_i - f_0|_{\text{Max}} \approx \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_0}} \quad \text{qui est de l'ordre de } 7 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

comme le montre la courbe 9.10.



Il existe donc une valeur de L_0 pour laquelle l'influence de C_0 est minimale, cependant il faut remarquer que :

- La réalisation d'une telle self est délicate puisque les valeurs intéressantes de L_0 sont contenues dans une fourchette extrêmement étroite (pour obtenir une valeur $|f_1 - f_0|_M > 100$ Hz, il faut que $0,08 < L_0 < 0,13$ mH et pour que $|f_1 - f_0|_M > 1$ KHz, il faut pratiquement la valeur exacte de L_0 à moins de 6 % près) d'où les difficultés de réalisation.

- L'introduction d'un élément réactif dans le résonateur introduit un paramètre nouveau dans la définition de la fréquence exacte de l'oscillateur et par conséquent une source de bruit paramétrique.

En définitive, le neutrodynage de la capacité parallèle par une self parallèle pose plus de problème qu'il n'en résout.

9.5.2 - Neutrodynage par capacité négative

Il est possible à l'aide d'amplificateurs opérationnels (ou même à l'aide de composants discrets) de réaliser des capacités négatives (dispositifs N.I.C) (56) mais pour utiliser ce genre de dispositif il faut que le quartz ait l'une de ses bornes à la masse ce qui n'est pas le cas pour les oscillateurs utilisés dans nos expériences. De plus, il est à craindre que l'on se heurte aux mêmes problèmes de bruit paramétrique qu'avec la self parallèle.

9.6 - COMPARAISON DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

Les résultats expérimentaux coïncident avec une bonne précision avec les courbes théoriques obtenues dans la deuxième partie aussi bien pour les spectres de phase que pour les spectres d'amplitude comme le montrent les figures ci-après.

9.6.1 - Spectres de phase d'un oscillateur 5 MHz

Les figures 9.11 et 9.12 (cf. figures 8.1 et 8.2) montrent le spectre des fluctuations de phase obtenues pour des excitations dont la fréquence est respectivement supérieure et inférieure à celle de l'oscillateur. Pour les fréquences d'excitation supérieures à f_0 on observe bien le pic d'absorption prévu par le calcul à la fréquence F_Δ (cf. § 8.4.3).

9.6.2 - Spectres d'amplitude (oscillateur 5 MHz)

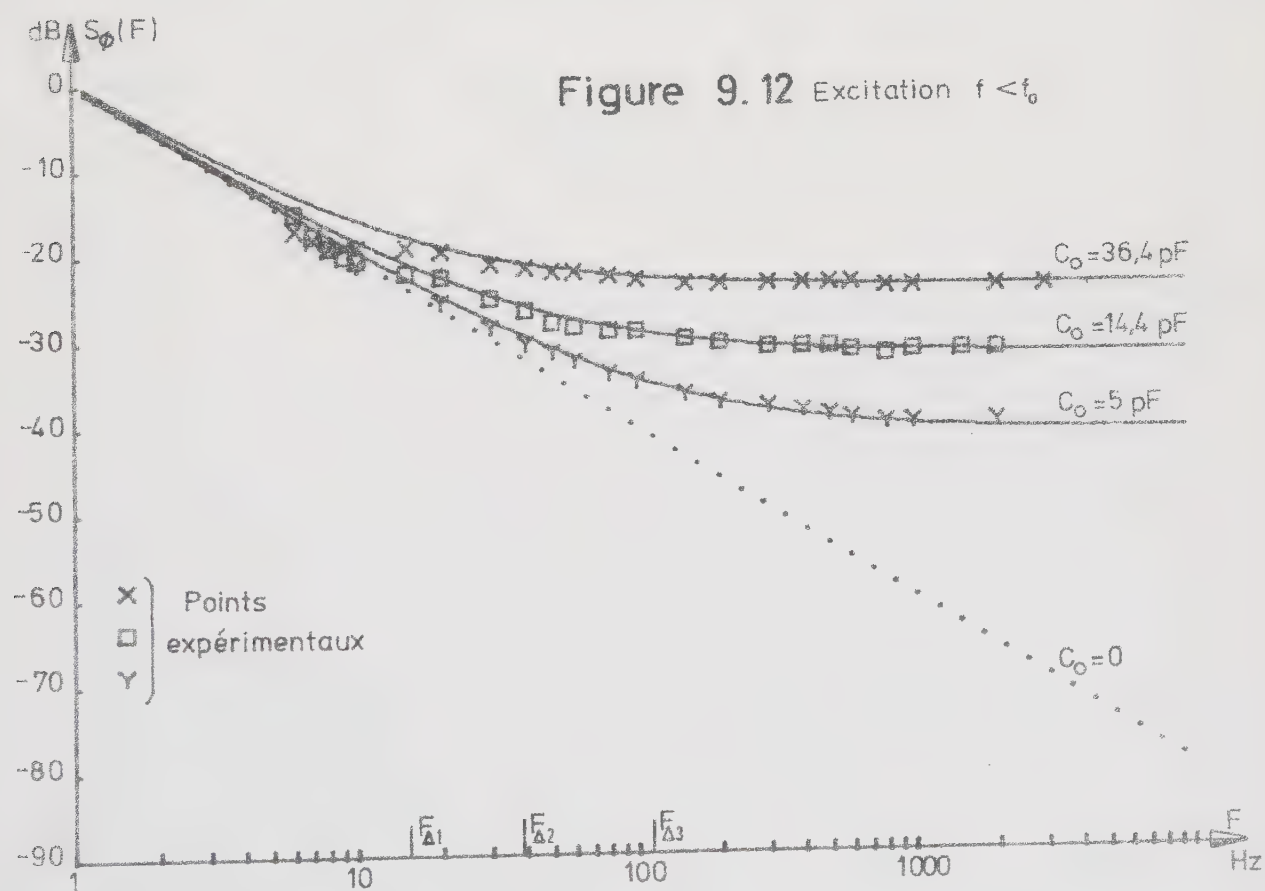
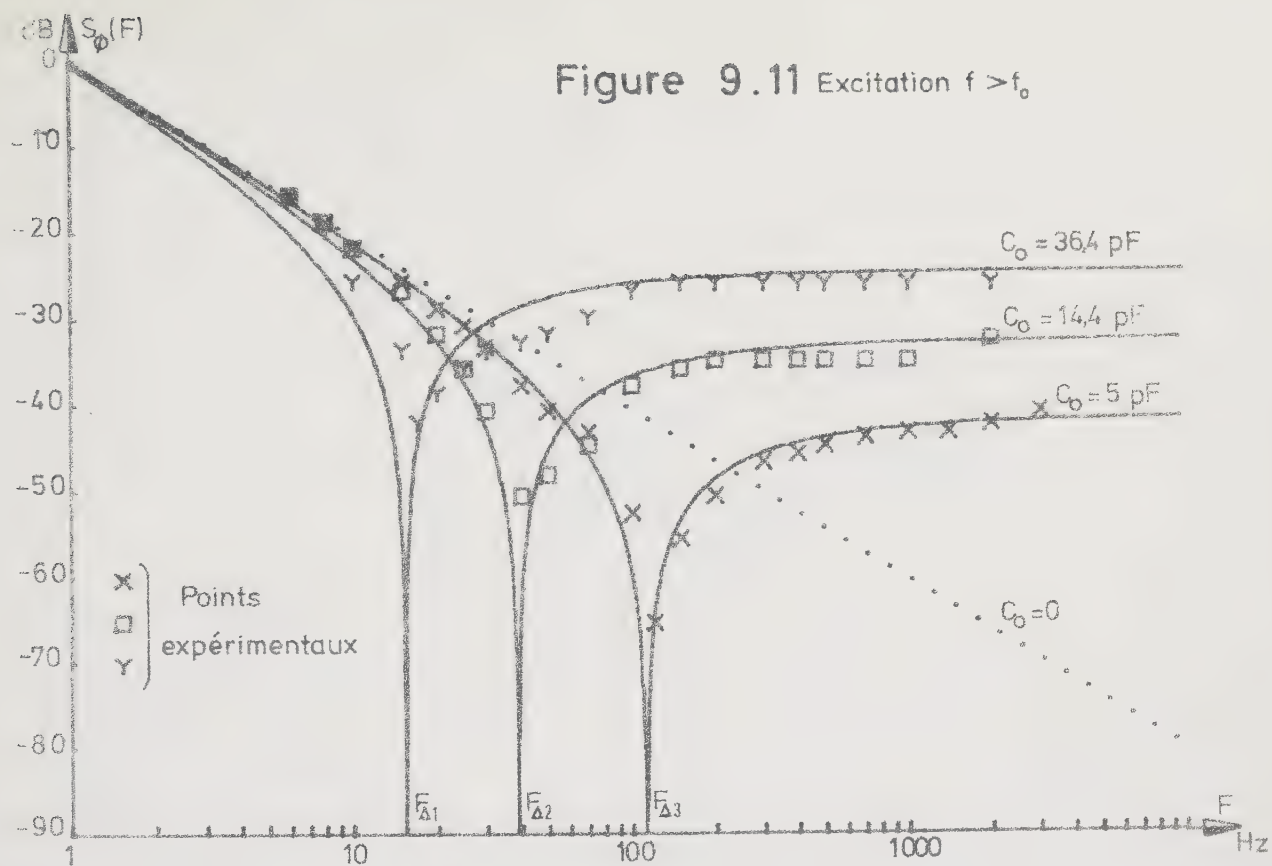
Le spectre expérimental des fluctuations relatives d'amplitude représenté sur les figures 9.13 et 9.14 montre, comme le prévoyait le calcul (§ 8.3) que la forme du spectre est analogue à celle du spectre de phase.

9.6.3 - Spectre de phase d'un oscillateur 5 MHz perturbé par un bruit blanc

La figure 9.15 montre les spectres théoriques (cf. § 8.4.3.c, figure 8.3) et expérimentaux obtenus lorsque l'oscillateur est perturbé par un bruit blanc au voisinage de la porteuse.

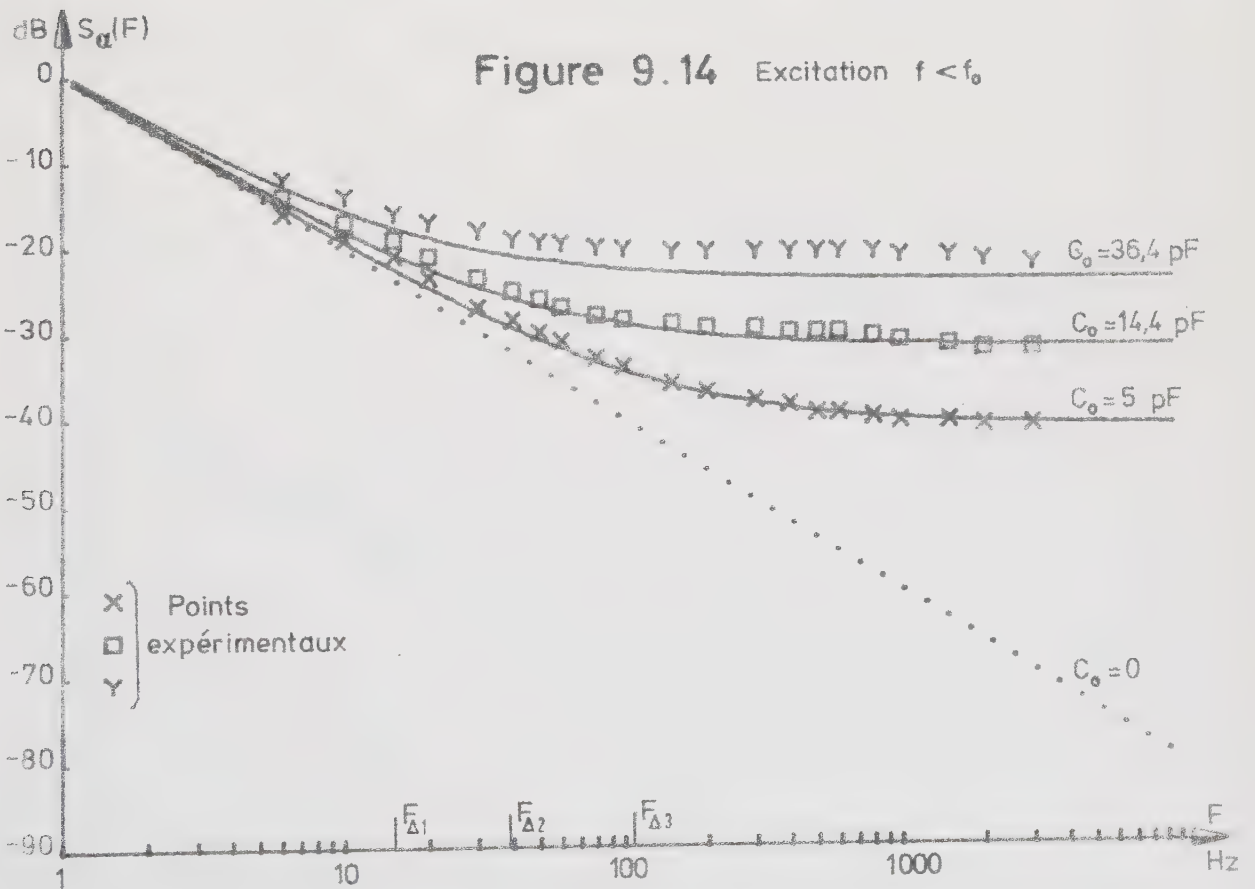
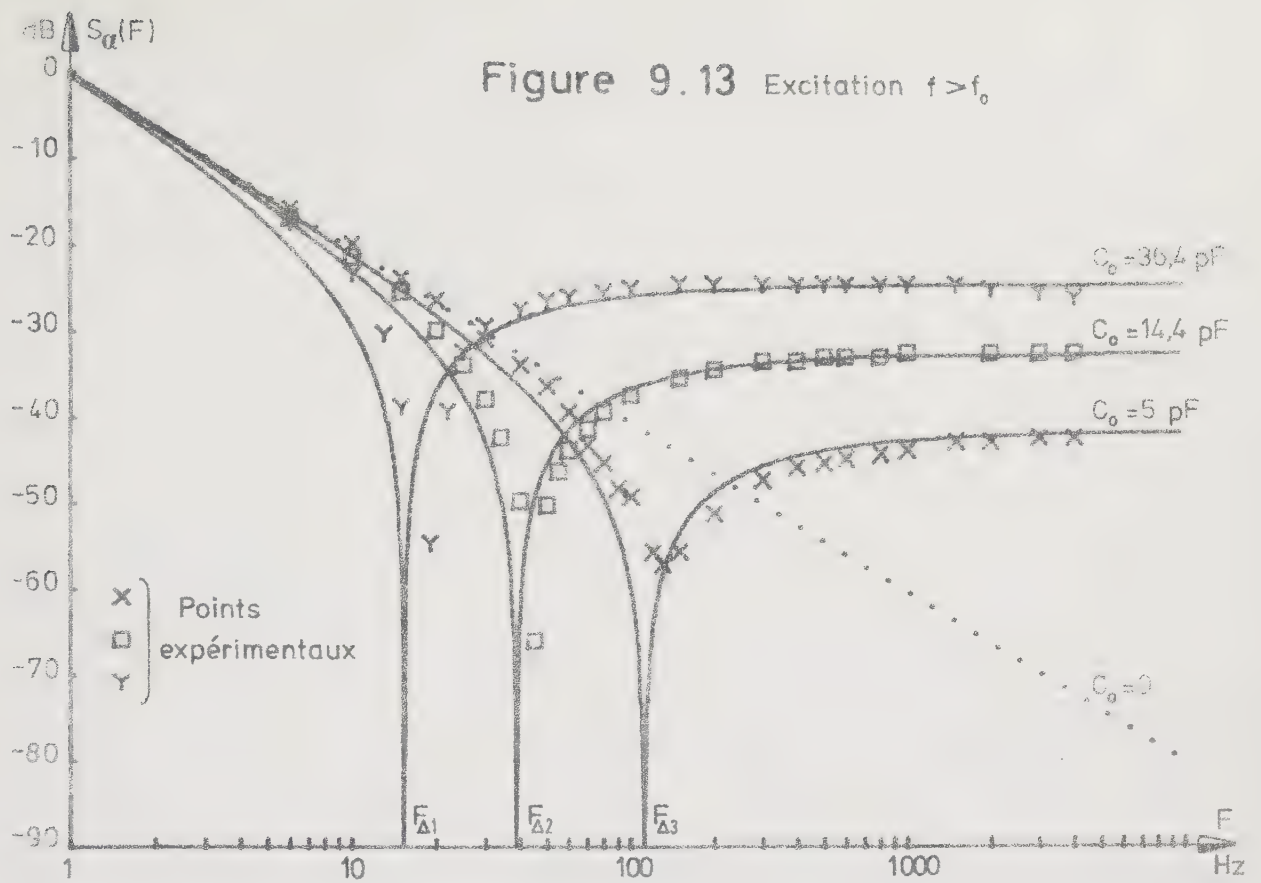
9.6.4 - Spectre de phase d'un oscillateur à 100 MHz perturbé

Nous avons également tracé le spectre de phase de l'oscillateur à 100 MHz décrit au § 9.2.2. La figure 9.16 montre les résultats expérimentaux et les courbes théoriques correspondantes. On constate également une bonne coïncidence entre les deux spectres.



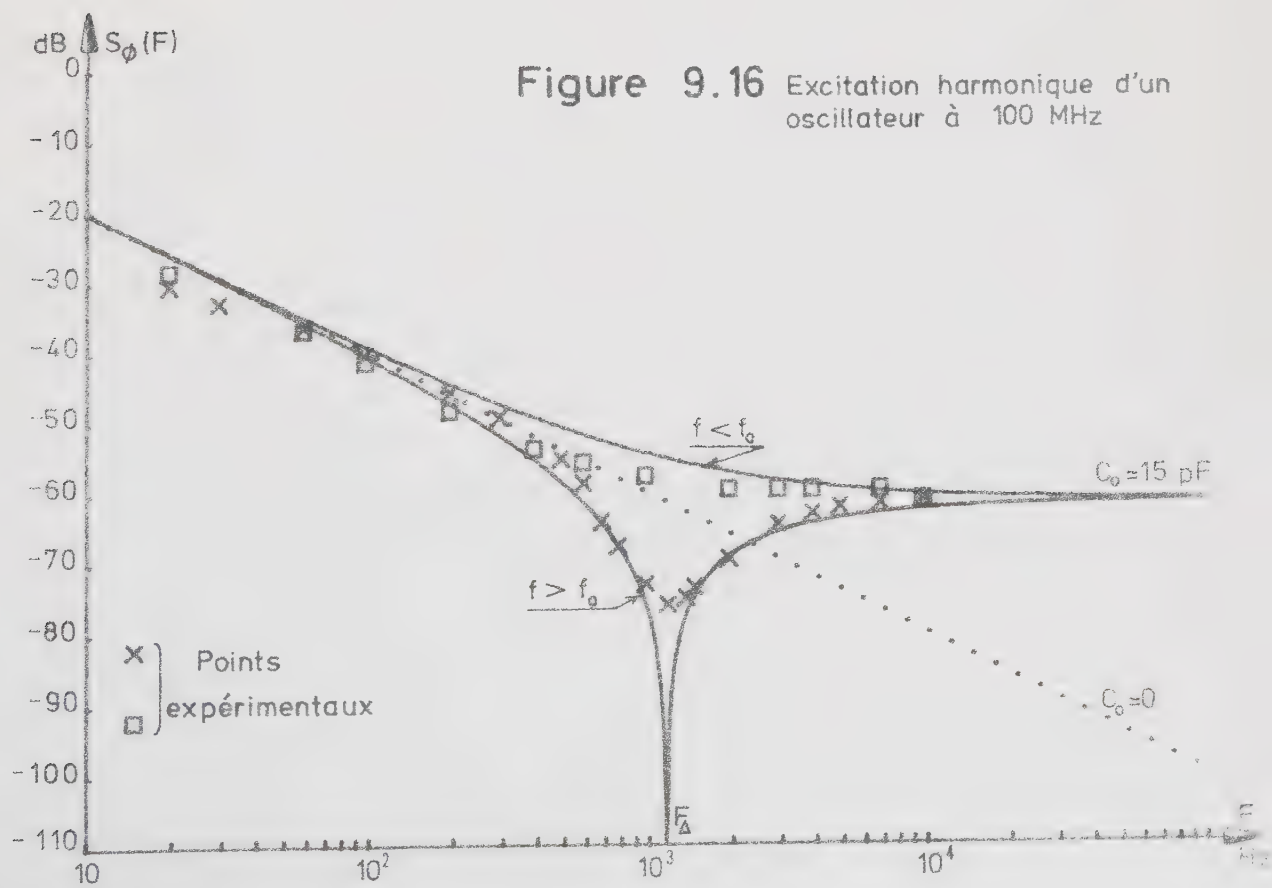
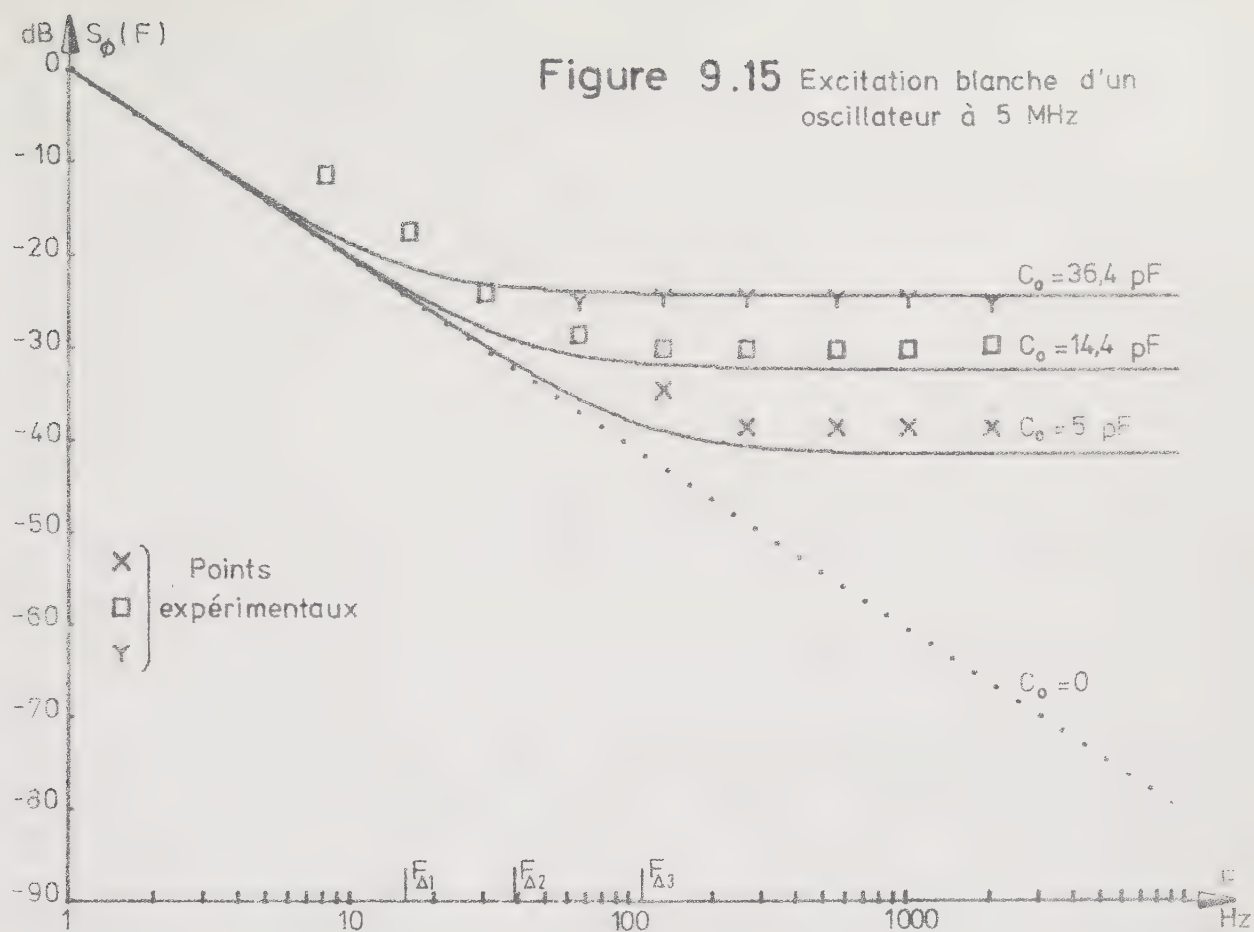
Spectres des fluctuations relatives de phase d'un oscillateur 5 MHz perturbé par une excitation harmonique.

Les courbes en trait plein sont les spectres théoriques correspondants.



Spectres des fluctuations relatives d'amplitude d'un oscillateur 5 MHz perturbé par une excitation harmonique.

Les courbes en trait plein sont les spectres théoriques correspondants.



CONCLUSION

L'étude de l'oscillateur à quartz à l'aide d'un modèle mathématique, tenant compte de la présence de la capacité parallèle, a permis de mettre en évidence :

- Une importante modification du spectre du bruit interne.
- Un couplage entre les fluctuations relatives d'amplitude et de fréquence environ 10^5 fois plus important qu'en l'absence de la capacité parallèle.

Ce dernier résultat montre que les fluctuations d'amplitude, longtemps considérées comme sans influence sur la stabilité de fréquence, peuvent en réalité jouer un rôle non négligeable dans les causes d'instabilité des oscillateurs à quartz de très haute stabilité.

La bonne correspondance entre les résultats expérimentaux et les courbes théoriques obtenues par les méthodes de la mécanique non linéaire présentées dans ce mémoire permet d'espérer qu'elles pourront s'étendre fructueusement à l'étude des fréquences de modulation proches de la porteuse, c'est-à-dire correspondant à des indices de modulation plus importants.

Par ailleurs ces méthodes peuvent aussi s'appliquer à un domaine mal connu à l'heure actuelle : il s'agit de l'influence du bruit paramétrique basse fréquence, c'est-à-dire le bruit qui perturbe les éléments définissant la fréquence d'oscillation du système et dont l'origine est encore incertaine. Ce bruit paramétrique est peut-être à la source du bruit de scintillation et nos méthodes devraient permettre d'en faire une simulation utile.

ANNEXE

SOMMAIRE DE L'ANNEXE

	pages
A.1.1.a - Gain en boucle ouverte d'un oscillateur	A1
b - Calcul de $ L $	A2
A.2.1 - Relation entre $S(\omega)$ et $S(f)$	A3
A.2.2.a - Détermination de A	A3
b - Calcul de la puissance moyenne délivrée par R	A5
A.2.3.a - Calcul de la valeur moyenne I_d	A5
b - Formule de Shottky	A6
c - Calcul de la puissance moyenne	A7
A.3.1 - Définition de la répartition spectrale de puissance $\Sigma_V(f)$	A8
A.3.2 - Calcul de la relation entre $\sigma^2(\overline{\phi(t,\tau)})$ et $S_{\phi}(\omega)$	A9
A.4.1 - Calcul du numérateur de dy/du^2	A11
A.5.1 - Forme réduite de l'équation différentielle	A12
A.6.1 - Calcul de $f(u,t)$ dans (6.34)	A14
A.6.2 - Calcul de F_2 dans (6.39)	A14
A.6.3 - Calcul de $S(a,\ddot{a},\dot{\phi},\ddot{\phi},t)$ dans (6.48)	A15
A.8.1 - Calcul de $\overline{f(u,t)}$ dans (8.25)	A16
A.9.1.a - Détermination des racines de (9.15)	A17
b - Evolutions des écarts f_0-f_1 et f_2-f_0	A17
c - Détermination de L_0 pour un écart $ f_1-f_0 $ maximal	A18
d - Détermination de l'écart $ f_1-f_0 $ maximal	A18

ANNEXE 1.1

a) Gain en boucle ouverte d'un oscillateur

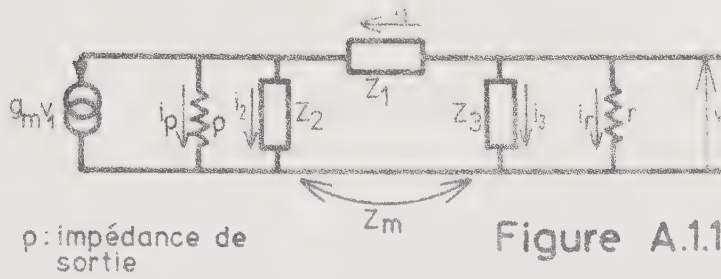


Figure A.1.1

$$\begin{aligned}
 (A.1.1) \quad & \left\{ \begin{array}{l} v = r \cdot i_r \\ = Z_3 i_3 - Z_m i_2 \\ = Z_1 i_1 + Z_2 i_2 - Z_m i_3 \\ = Z_1 i_1 + \rho i_\rho \\ i_r = -(i_1 + i_3) \\ i_\rho = i_1 - i_2 - g_m v_1 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad (A.1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} v + r(i_1 + i_3) = 0 \\ v + Z_m i_2 - Z_3 i_3 = 0 \\ v - Z_1 i_1 - Z_2 i_2 + Z_m i_3 = 0 \\ v - (Z_1 + \rho) i_1 + \rho i_2 = -\rho g_m v_1 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Le système A.1.2 peut aussi s'écrire :

$$\begin{pmatrix} 1 & r & 0 & r \\ 1 & 0 & Z_m & -Z_3 \\ 1 & -Z_1 & -Z_2 & Z_m \\ 1 & -(Z_1 + \rho) & \rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g_m \rho v_1 \end{pmatrix} \quad (A.1.3)$$

Δ

La tension v est donnée par le rapport :

$$v = \frac{D}{\Delta}$$

$$(A.1.4) \quad D = \begin{vmatrix} 0 & r & 0 & r \\ 0 & 0 & Z_m & -Z_3 \\ 0 & -Z_1 & -Z_2 & Z_m \\ -\rho g_m v_1 & -(Z_1 + \rho) & \rho & 0 \end{vmatrix} = -\rho g_m v_1 r (Z_2 Z_3 - Z_m (Z_1 + Z_m))$$

$$(A.1.5) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & r & 0 & r \\ 0 & -r & Z_m & -(Z_3 + r) \\ 0 & -(Z_1 + r) & -Z_2 & Z_m - r \\ 0 & -(Z_1 + \rho + r) & \rho & -r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r & Z_m & -(Z_3 + r) \\ -(Z_1 + r) & -Z_2 & (Z_m - r) \\ -(Z_1 + \rho + r) & \rho & -r \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (Z_1 + r)(Z_2 Z_3 - Z_m^2) + r Z_1 Z_2 + \rho (Z_m (2r - Z_m) + r Z_3 + (r + Z_3)(Z_1 + Z_2)) \quad (A.1.6)$$

On peut maintenant obtenir le rapport :

$$(A.1.7) \quad L = \frac{v}{v_1} = - \frac{\rho g_m r (Z_2 Z_3 - Z_m (Z_1 + Z_m))}{\rho ((r + Z_3)(Z_1 + Z_2) + r Z_3 + Z_m (2r - Z_m)) + (Z_1 + r)(Z_2 Z_3 - Z_m^2) + r Z_1 Z_2}$$

La relation (1.1) s'obtient immédiatement en faisant tendre ρ vers l'infini.

$$(A.1.8) \quad L = \frac{v}{v_1} = - \frac{g_m r (Z_2 Z_3 - Z_m (Z_1 + Z_m))}{(r + Z_3)(Z_1 + Z_2) + r Z_3 + Z_m (2r - Z_m)} \quad \text{cf. (1.1)}$$

b) Calcul de |L| :

$$\text{Reprenons la relation (1.2) : } X_1 + X_2 + X_3 + 2X_m = 0 \quad (A.1.9)$$

$$(A.1.9) \text{ peut aussi s'écrire : } \left. \begin{aligned} 2X_m &= -X_1 - X_2 - X_3 \\ \text{ou encore : } X_1 + X_m &= -X_2 - X_3 - X_m \end{aligned} \right\} \quad (A.1.10)$$

d'où :

$$\begin{aligned} |L| &= \frac{rg_m (X_2 X_3 - X_m (X_1 + X_m))}{-X_3 (X_1 + X_2) + X_m^2} = \frac{rg_m (X_2 X_3 + X_m (X_1 + X_2 + X_m))}{X_3 (X_3 + 2X_m) + X_m^2} \\ &= \frac{rg_m (X_2 (X_3 + X_m) + X_m (X_3 + X_m))}{(X_3 + X_m)^2} = \frac{rg_m (X_2 + X_m)}{X_3 + X_m} \end{aligned} \quad (A.1.11)$$

d'où le résultat (1.3).

ANNEXE 2.1

Relation entre $S(\omega)$ et $S(f)$:

Par définition :
$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad \text{cf. (2.23)}$$

on ne change pas la définition en remplaçant ω par f et τ par θ , donc :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\theta) e^{-jf\theta} d\theta \quad (\text{A.2.1})$$

or $f = \frac{\omega}{2\pi}$, donc :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\theta) e^{-j\frac{\omega\theta}{2\pi}} d\theta \quad (\text{A.2.2})$$

en posant $\frac{\theta}{2\pi} = \tau$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} d\theta &= 2\pi d\tau \quad \text{et} \quad S(f) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= 2\pi S(\omega) \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

ANNEXE 2.2

a) - Détermination de A :

Une résistance ~~réelle~~ peut être considérée comme une résistance sans bruit en série avec une f.e.m. $V(t)$ aléatoire ayant les statistiques d'un bruit blanc (figure A.2.1) :

$$(\text{A.2.4}) \quad \begin{cases} V(t) = 0 \\ R_V(\tau) = A \delta(\tau) \\ S_V(\omega) = A \end{cases}$$



Figure A.2.1

Etudions le spectre du signal aléatoire $W(t)$ aux bornes de C .
 $W(t)$ peut être considéré comme le signal de sortie d'un système linéaire constitué par R et C (figure A.2.2).

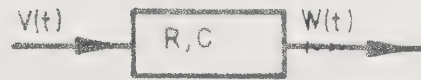


Figure A.2.2

La fonction de transfert de ce système peut être déterminée à partir de l'équation différentielle liant $v(t)$ et $w(t)$ (figure A.2.3).

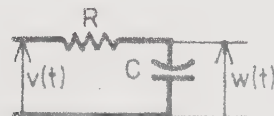


Figure A.2.3

$$v = w + R C \frac{dw}{dt} \quad (A.2.5)$$

En régime harmonique $\frac{dw}{dt} = j \omega w$, le gain complexe est alors défini par la relation :

$$H(j\omega) = \frac{w}{v} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad (A.2.6)$$

La relation (2.31) donne directement le spectre de $W(t)$:

$$S_W(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_V(\omega) \quad (A.2.7) \quad \text{ici :}$$

$$S_W(\omega) = \frac{A}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \quad (A.2.8)$$

La puissance transportée par le processus $W(t)$ est d'après (2.26) :

$$\overline{W^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A d\omega}{1 + R^2 C^2 \omega^2} = \frac{A}{2RC} \quad (A.2.9)$$

Le théorème d'équipartition de l'énergie (57, 58) appliqué au problème particulier qui nous concerne s'écrit :

$$\frac{1}{2} C \overline{W^2(t)} = \frac{1}{2} k T \rightarrow \overline{W^2(t)} = \frac{kT}{C} \quad (A.2.10)$$

avec : k : constante de Boltzmann ; $k = 1,37 \cdot 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$
 T : température absolue en $^\circ\text{K}$.

En comparant (A.2.9) et (A.2.10), nous obtenons :

$A = 2 R k T$ (A s'exprime en V^2/Hz), par conséquent :

$$S_V(\omega) = 2 R k T \text{ ou encore } S_V(\omega \geq 0) = 4 R k T \quad (A.2.11)$$

Cette relation constitue le théorème de Nyquist.

b) - Calcul de la puissance moyenne délivrée par la résistance R :

En appliquant la relation (2.26), nous pouvons calculer :

$$\overline{V^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_V(\omega) d\omega = 2RkT \int_{-\infty}^{+\infty} df = 4RkT \int_0^{\infty} df \quad (A.2.12)$$

Nous voyons que cette puissance tend vers l'infini car l'intégrale diverge. Physiquement, cette puissance est limitée par la bande passante du système de mesure. En général on détermine la puissance du processus $V(t)$ dans un intervalle de fréquence $\Delta f = f_2 - f_1$, les fréquences f_1 et f_2 étant les limites de la bande passante efficace du système de mesure (59). (A.2.12) s'écrit alors :

$$\overline{V^2(t)} = 4RkT \int_{f_1}^{f_2} df = 4RkT \Delta f \quad (A.2.13)$$

ANNEXE 2.3

a) Calcul de la valeur moyenne I_d pour le bruit de grenaille :

L'ensemble des impulsions de courant constitue un processus aléatoire $I(t)$ que l'on peut considérer comme la sortie d'un système linéaire de réponse impulsionnelle :

$$h(t) = q \delta(t) \quad (A.2.14)$$

dont l'entrée est le processus stochastique $Z(t)$ (cf. 2.21) (Ici, q désigne la charge de l'électron : $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C) (cf. figure A.2.4)



Figure A.2.4

La fonction de transfert du système linéaire est donnée par

$$(2.28) : H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} q \delta(t) e^{-j\omega t} dt = q \quad (A.2.15)$$

La valeur moyenne du processus $I(t)$ s'obtient en appliquant la relation (2.29) :

$$(A.2.16) \quad I_d = E \{I(t)\} = E \{Z(t)\} \cdot H(0) = \lambda q \quad (\text{cf. (2.22) et (A.2.15)})$$

b) - Formule de Shottky :

Pour déterminer le spectre des fluctuations de courant autour de la valeur moyenne I_d , nous allons chercher les statistiques des fluctuations du nombre d'électrons émis autour de la valeur moyenne λ . Pour cela nous étudierons la variable aléatoire centrée :

$$Z'(t) = Z(t) - \lambda \quad (A.2.17)$$

dont la valeur moyenne est évidemment nulle et dont la fonction d'auto-corrélation $R_{Z'}(\tau)$ n'est autre que la fonction d'autocovariance de $Z(t)$ (cf. (2.8) et (2.9)) :

$$(A.2.18) \quad R_{Z'}(\tau) = C_Z(\tau) = R_Z(\tau) - \lambda^2 = \lambda \delta(\tau) \quad \text{cf. (2.22)}$$

La d.s.p. du processus $Z'(t)$ s'écrit par conséquent :

$$(A.2.19) \quad S_{Z'}(\omega) = \lambda \quad \text{cf. (2.23)}$$

Les fluctuations de courant : $J(t) = I(t) - I_d$ autour de la valeur moyenne I_d sont obtenues en appliquant à l'entrée du système linéaire $h(t)$ (cf. (A.2.14)), le processus $Z'(t)$. Le spectre de ces fluctuations est alors donné par la relation (2.31) :

$$(A.2.20) \quad S_J(\omega) = S_{Z'}(\omega) \cdot |H(j\omega)|^2$$

ici $H(j\omega) = q$ (cf. (A.2.15)) $\rightarrow S_J(\omega) = \lambda q^2$ (A.2.21) cf. (A.2.19)
par conséquent :

$$R_J(\tau) = \lambda q^2 \delta(\tau) \quad (A.2.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Comme } I_d = \lambda q \text{ (cf. (A.2.16))}, \text{ nous obtenons : } S_J(\omega) &= q I_d \\ S_J(\omega \geq 0) &= 2 q I_d \end{aligned} \right\} (A.2.23)$$

cette relation est la formule de Shottky.

c) - Calcul de la puissance moyenne :

La relation (2.26) permet d'écrire :

$$\overline{J^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} q I_d df = 2 q I_d \int_0^{\infty} df \quad (A.2.24)$$

Comme pour l'intégrale (A.2.12) nous pouvons seulement déterminer la puissance dans une bande de fréquence Δf correspondant à la bande passante efficace de l'appareil de mesure :

$$\overline{J^2(t)} = 2 q I_d \Delta f \quad (A.2.25)$$

ANNEXE 3.1

Définition de la répartition spectrale de puissance $\sum_V(f)$

Pour un signal sinusoïdal pur :

$$S_V(f) = \frac{V^2}{4} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \quad \text{cf. (3.19)}$$

Considérons la puissance du signal contenue dans un intervalle de fréquence de largeur Δf autour de la fréquence f , par définition :

$$(A.3.1) \quad \sum_V(f, \Delta f) = \int_{f - \frac{\Delta f}{2}}^{f + \frac{\Delta f}{2}} S_V(f') df' = \frac{V^2}{4} \int_{f - \frac{\Delta f}{2}}^{f + \frac{\Delta f}{2}} (\delta(f' - f_0) + \delta(f' + f_0)) df'$$

or :

$$(A.3.2) \quad \int_{f - \frac{\Delta f}{2}}^{f + \frac{\Delta f}{2}} = \int_{f - \frac{\Delta f}{2}}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{f + \frac{\Delta f}{2}}$$

la distribution δ étant une fonction paire de son argument, nous pouvons écrire :

$$(A.3.3) \quad \int_{f - \frac{\Delta f}{2}}^{\infty} = \int_{-\infty}^{f - \frac{\Delta f}{2}} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{f + \frac{\Delta f}{2}} = - \int_{f + \frac{\Delta f}{2}}^{\infty}$$

par conséquent :

$$(A.3.4) \quad \int_{f - \frac{\Delta f}{2}}^{f + \frac{\Delta f}{2}} = \int_{-\infty}^{f - \frac{\Delta f}{2}} + \int_{f + \frac{\Delta f}{2}}^{\infty}$$

or :

$$(A.3.5) \quad \int_{-\infty}^{f - \frac{\Delta f}{2}} (\delta(f' - f_0) + \delta(f' + f_0)) df' = U(f - \frac{\Delta f}{2} - f_0) + U(f - \frac{\Delta f}{2} + f_0)$$

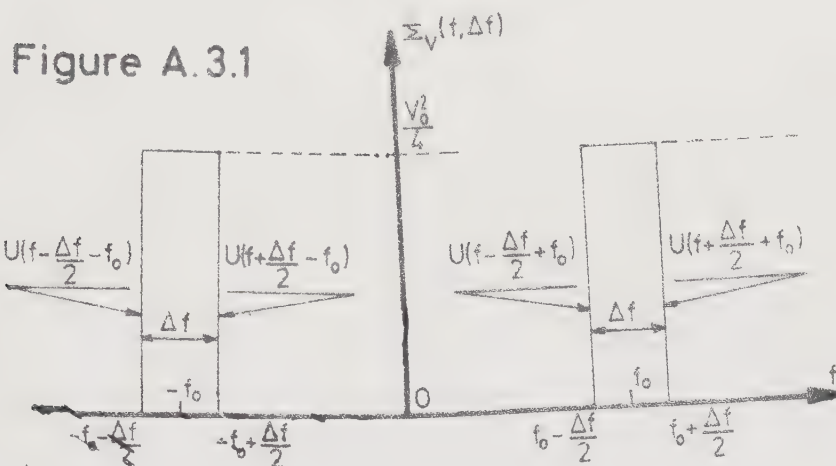
U étant l'échelon unité, de même :

$$(A.3.6) \quad \int_{f + \frac{\Delta f}{2}}^{\infty} (\delta(f' - f_0) + \delta(f' + f_0)) df' = U(f + \frac{\Delta f}{2} - f_0) + U(f + \frac{\Delta f}{2} + f_0)$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\sum_V(f, \Delta f) = \frac{V_0^2}{4} \left(U(f - \frac{\Delta f}{2} - f_0) - U(f + \frac{\Delta f}{2} - f_0) + U(f - \frac{\Delta f}{2} + f_0) - U(f + \frac{\Delta f}{2} + f_0) \right) \quad (A.3.7)$$

Cette fonction est représentée figure A.3.1.



Nous définirons à présent la répartition spectrale $\sum_V(f)$ comme la limite de $\sum_V(f, \Delta f)$ quand $\Delta f \rightarrow df$.

$$(A.3.8) \quad \sum_V(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow df} \sum_V(f, \Delta f) = \int_{f - \frac{df}{2}}^{f + \frac{df}{2}} S_V(f') df'$$

fonction représentée sur la figure 3.3.

ANNEXE 3.2

Calcul de la relation entre $\sigma^2(\dot{\phi}(t, \tau))$ et $S_{\dot{\phi}}(\omega)$

Dans (3.54), nous avons à calculer :

$$I = \int_t^{t+\tau} \int_t^{t+\tau} \cos \omega(t_2 - t_1) dt_1 dt_2$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_t^{t+\tau} \cos \omega t_1 dt_1 \int_t^{t+\tau} \cos \omega t_2 dt_2 + \int_t^{t+\tau} \sin \omega t_1 dt_1 \int_t^{t+\tau} \sin \omega t_2 dt_2 \\
 &= \frac{1}{\omega^2} (\sin \omega(t+\tau) - \sin \omega t)^2 + \frac{1}{\omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega(t+\tau))^2 \\
 &= \frac{2}{\omega^2} (1 - \sin \omega t \sin \omega(t+\tau) - \cos \omega t \cos \omega(t+\tau)) = \frac{2}{\omega^2} (1 - \cos \omega \tau) \\
 &= \frac{4}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega \tau}{2}
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\overline{\sigma^2(\phi(t, \tau))} = \frac{4}{2\pi\tau^2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi}(\omega) \frac{\sin^2 \frac{\omega \tau}{2}}{\omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi}(\omega) \frac{\sin^2 \frac{\omega \tau}{2}}{(\frac{\omega \tau}{2})^2} d\omega$$

ANNEXE 4.1

Calcul du numérateur de $\frac{dy}{du^2}$

Posons $v = u^2$, $v_p = u_p^2$, $k = \omega_0 \theta$

$$(A.4.1) \quad y = \frac{v \left(\frac{v}{Q^2} + (v - v_p)^2 \right)}{v \left(k(v - v_p) - \frac{1}{Q} \right)^2 + \left(1 - v \left(\frac{k}{Q} + 1 \right) \right)^2} \quad \text{cf (4.18) et (4.33)}$$

$$(A.4.2) \quad N\left(\frac{dy}{dv}\right) = \left\{ \left(\frac{v}{Q^2} + (v - v_p)^2 \right) + v \left(\frac{1}{Q^2} + 2(v - v_p) \right) \right\} .$$

$$\left\{ v \left(k(v - v_p) - \frac{1}{Q} \right)^2 + \left(1 - v \left(\frac{k}{Q} + 1 \right) \right)^2 \right\}$$

$$-v \left(\frac{v}{Q^2} + (v - v_p)^2 \right) \left\{ \left(k(v - v_p) - \frac{1}{Q} \right)^2 + 2vk \left(k(v - v_p) - \frac{1}{Q} \right) \right.$$

$$\left. -2 \left(1 - v \left(\frac{k}{Q} + 1 \right) \right) \left(\frac{k}{Q} + 1 \right) \right\} = 0$$

En négligeant les termes du second ordre $\frac{k^2}{Q^2}$, $\frac{1}{Q^3}$, $\frac{k}{Q^3}$... nous pouvons réécrire cette expression sous la forme :

$$(A.4.3) \quad N\left(\frac{dy}{dv}\right) = \left((v_p - v)(v_p - 3v) + \frac{2v}{Q^2} \right) \left(k^2 v(v - v_p)^2 + (v - 1)^2 + \frac{2kv}{Q}(v_p - 1) + \frac{v}{Q^2} \right) - \left(v(v - v_p)^2 + \frac{v^2}{Q^2} \right) \left(k^2 (v_p - v)(v_p - 3v) + 2(v - 1) + \frac{2k}{Q}(v_p - 1) + \frac{1}{Q^2} \right) = 0$$

Après avoir développé et regroupé les termes, nous obtenons :

$$(A.4.4) \quad (v_p - v)(v - 1) \left((v_p - v)(v - 1) - 2v(v_p - 1) \right) - \frac{4kv^2}{Q} (v_p - v)(v_p - 1) - \frac{2v^2}{Q^2} (v_p - v) - \frac{2v}{Q^2} (v - 1) = 0$$

C.Q.F.D.

ANNEXE 5.1

Forme réduite de l'équation différentielle

a) En utilisant les définitions (4.4), (4.8) (5.6) et (5.8) nous pouvons écrire le premier terme du deuxième membre de (5.13) sous la forme :

$$\begin{aligned} E_1 &= - \left\{ \frac{\omega_0}{Q} + \omega_d^2 (\theta - R_2 \theta_3 (g_0 - 3\beta v_0^2 x^2)) \right\} \dot{x} \\ &= - \left[\frac{R_1}{L_1} + \frac{1}{L_1} \{ (R_2 + R_3) - R_2 R_3 (g_0 - 4(g_0 - g_Q)x^2) \} \right] \dot{x} \\ &= \left\{ - \frac{R_1 + R_2 + R_3}{L_1} + \frac{R_2 R_3}{L_1} (g_0 - 4(g_0 - g_Q)x^2) \right\} \dot{x} \end{aligned}$$

Nous pouvons faire apparaître g_Q en mettant $\frac{R_2 R_3}{L_1}$ en facteur :

$$E_1 = \frac{R_2 R_3}{L_1} (g_0 - g_Q - 4(g_0 - g_Q)x^2) \dot{x} = \frac{R_2 R_3 (g_0 - g_Q)}{L_1} (1 - 4x^2) \dot{x}$$

or $L_1 = \frac{1}{\omega_0^2 C_1}$, donc :

$$E_1 = \omega_0^2 C_1 R_2 R_3 (g_0 - g_Q) (1 - 4x^2) \dot{x} \quad \begin{array}{l} \text{d'où le premier terme du} \\ \text{deuxième membre de (5.16)} \\ \text{avec } \lambda \text{ donné par (5.14).} \end{array}$$

b) De la même façon, le second terme du deuxième membre de (5.13) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} E_2 &= - \frac{\omega_0}{Q} \{ (\theta - R_2 \theta_3 (g_0 - 3\beta v_0^2 x^2)) \ddot{x} + 6\beta v_0^2 R_2 \theta_3 x \dot{x}^2 \} \\ &= \frac{R_1 C_0}{L_1} \left\{ \{ -(R_2 + R_3) + R_2 R_3 (g_0 - 4(g_0 - g_Q)x^2) \} \ddot{x} \right. \\ &\quad \left. - 8(g_0 - g_Q) R_2 R_3 x \dot{x}^2 \right\} \end{aligned}$$

En mettant $C_0 R_2 R_3$ en facteur nous obtenons :

$$E_2 = \frac{R_1 R_2 R_3 C_0}{L_1} \left\{ (g_0 - g_Q + \frac{R_1}{R_2 R_3} - 4(g_0 - g_Q)x^2) \ddot{x} - 8(g_0 - g_Q)x \dot{x}^2 \right\}$$

ce qui donne :

$$E_2 = \frac{R_1 R_2 R_3 C_0 (g_0 - g_Q)}{L_1} \left\{ \left(1 + \frac{R_1}{R_2 R_3 (g_0 - g_Q)} - 4x^2 \right) \ddot{x} - 8x \dot{x}^2 \right\}$$

En rappelant que $L_1 = 1/\omega_0^2 C_1$ nous obtenons le second terme du deuxième membre de (5.16) avec ϵ donné par (5.14) et γ par (5.15)

c) Pour le troisième terme du second membre de (5.13), le raisonnement précédent nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} E_3 &= -\{(\theta - R_2 \theta_3 (g_0 - 3\beta v_0^2 x^2)) (\ddot{x} + \omega_0^2 \dot{x}) + 6\beta v_0^2 R_2 \theta_3 \dot{x} (3x\ddot{x} + \dot{x}^2)\} \\ &= C_0 \left\{ \{-(R_2 + R_3) + R_2 R_3 (g_0 - 4(g_0 - g_Q)x^2)\} (\ddot{x} + \omega_0^2 \dot{x}) \right. \\ &\quad \left. - 8 R_2 R_3 (g_0 - g_Q) \dot{x} (3x\ddot{x} + \dot{x}^2) \right\} \\ &= C_0 R_2 R_3 \left\{ (g_0 - g_Q + \frac{R_1}{R_2 R_3} - 4(g_0 - g_Q)x^2) (\ddot{x} + \omega_0^2 \dot{x}) \right. \\ &\quad \left. - 8(g_0 - g_Q) \dot{x} (3x\ddot{x} + \dot{x}^2) \right\} \end{aligned}$$

Pour que la quantité entre accolades soit homogène et du même ordre de grandeur que les termes du premier membre de (5.13), nous mettrons $\omega_0 (g_0 - g_Q)$ en facteur, ce qui donne :

$$E_3 = \omega_0 C_0 R_2 R_3 (g_0 - g_Q) \left((\gamma - 4x^2) \left(\frac{\ddot{x}}{\omega_0} + \omega_0 \dot{x} \right) - \frac{8\dot{x}}{\omega_0} (3x\ddot{x} + \dot{x}^2) \right)$$

d'où le troisième terme du deuxième membre de (5.16) avec μ donné par (5.14) et γ par (5.15).

ANNEXE 6.1

Calcul de $f(u,t)$ dans (6.34)

Remplaçons dans (6.32) x et $\dot{x}$ par (6.22) et (6.23), il vient :

$$\begin{aligned} S(a,\phi,t) &= - (1 - 4a^2 \cos^2 \psi) \omega_0^2 a \sin \psi \\ &= - \omega_0^2 a (\sin \psi - 2a^2 \sin \psi (1 + \cos 2\psi)) \\ &= - \omega_0^2 a ((1 - a^2) \sin \psi - a^2 \sin 3\psi) \end{aligned}$$

La première ligne de $f(u,t)$ s'écrit d'après (6.30) :

$$\begin{aligned} - \frac{1}{\omega_0} S(a,\phi,t) \sin \psi &= \omega_0 a ((1-a^2) \sin^2 \psi - a^2 \sin \psi \sin 3\psi) \\ &= \frac{\omega_0 a}{2} ((1-a^2) - \cos 2\psi + a^2 \cos 4\psi) \end{aligned}$$

et la seconde ligne :

$$\begin{aligned} - \frac{1}{a\omega_0} S(a,\phi,t) \cos \psi &= \omega_0 ((1-a^2) \sin \psi \cos \psi - a^2 \sin 3\psi \cos \psi) \\ &= \frac{\omega_0}{2} ((1-2a^2) \sin 2\psi - a^2 \sin 4\psi) \end{aligned}$$

d'où le résultat (6.34).

ANNEXE 6.2

Calcul de F_2 dans (6.39)

En intégrant (6.36) nous obtenons :

$$\int_{\tilde{f}}^{\tilde{v}} = \left[\begin{array}{l} \frac{a}{2} \left(- \frac{\sin 2\psi}{2} + \frac{a^2}{4} \sin 4\psi \right) \\ \frac{1}{2} \left(- \frac{(1-2a^2)}{2} \cos 2\psi + \frac{a^2}{4} \cos 4\psi \right) \end{array} \right] \quad (A.6.1)$$

D'autre part :

$$(A.6.2) \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a} & \frac{\partial f_2}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\omega_0}{2} \cos 2\psi + \frac{3a^2\omega_0}{2} \cos 4\psi & \frac{\omega_0 a}{2} (2\sin 2\psi - 4a^2 \sin 4\psi) \\ -2\omega_0 a \sin 2\psi - \omega_0 a \sin 4\psi & \frac{\omega_0}{2} (2(1-2a^2)\cos 2\psi - 4a^2 \cos 4\psi) \end{pmatrix}$$

En remarquant que dans le produit $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \int \tilde{f}$ seuls les termes en $\sin^2$ ou $\cos^2$ ont une valeur moyenne non nulle nous pouvons écrire :

$$(A.6.3) \quad \overline{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \int \tilde{f}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\omega_0 a^2}{4} - \frac{\omega_0 a^4}{16} - \frac{\omega_0}{8} (1-2a^2)^2 - \frac{a^4 \omega_0}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\omega_0 a^2}{4} - \frac{3\omega_0 a^4}{16} - \frac{\omega_0}{8} (1-2a^2)^2 \end{pmatrix}$$

ANNEXE 6.3

Calcul de $S(a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi}, t)$ dans (6.48)

En utilisant la relation (6.23) nous pouvons calculer :

$$\ddot{x} = -\dot{a}\omega_0 \sin \psi - a\omega_0 (\omega_0 + \dot{\phi}) \cos \psi \quad (A.6.4)$$

En reportant (6.22) (6.23) et (A.6.4) dans (6.47) nous obtenons :

$$\begin{aligned} S(a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi}, t) &= -\omega_0 (\gamma - 4a^2 \cos^2 \psi) (\dot{a} \sin \psi + a(\omega_0 + \dot{\phi})) \cos \psi - 8\omega_0^2 a^3 \cos \psi \sin^2 \psi \\ &= -\omega_0 (\gamma \dot{a} \sin \psi \cos \psi + \gamma a(\omega_0 + \dot{\phi}) \cos \psi - 4\dot{a}a^2 \sin \psi \cos^3 \psi \\ &\quad - 4a^3(\omega_0 + \dot{\phi}) \cos^3 \psi + 8\omega_0 a^3 \sin^2 \psi \cos \psi) \\ &= -\frac{\omega_0}{2} \{ (2\gamma a(\omega_0 + \dot{\phi}) - 6a^3(\omega_0 + \dot{\phi}) + 4\omega_0 a^3) \cos \psi + (\gamma \dot{a} - 2\dot{a}a^2) \sin 2\psi \\ &\quad - (2a^3(\omega_0 + \dot{\phi}) - 4\omega_0 a^3) \cos 3\psi - \dot{a}a^2 \sin 4\psi \} \\ &= -\frac{\omega_0}{2} \{ (2a\omega_0 (\gamma - a^2) + 2a\dot{\phi}(\gamma - 3a^2)) \cos \psi + \dot{a}(\gamma - 2a^2) \sin 2\psi \\ &\quad + 2a^3(\omega_0 - \dot{\phi}) \cos 3\psi - \dot{a}a^2 \sin 4\psi \} \end{aligned}$$

ANNEXE 8.1 ---

Calcul de $\overline{f(u,t)}$ dans (8.25)

En développant (8.24) nous obtenons :

$$f(u,t) = \left[\begin{aligned} & - \frac{1}{2\omega_0} \left\{ A' \{ \sin((2\omega_0 \pm \Omega)t + \phi) \mp \sin(\Omega t \mp \phi) \} \right. \\ & \quad \left. + B' \{ \cos(\Omega t \mp \phi) - \cos((2\omega_0 \pm \Omega)t + \phi) \} \right\} \\ & - \frac{1}{2a\omega_0} \left\{ A' \{ \cos((2\omega_0 \pm \Omega)t + \phi) + \cos(\Omega t \mp \phi) \} \right. \\ & \quad \left. + B' \{ \sin((2\omega_0 \pm \Omega)t + \phi) \pm \sin(\Omega t \mp \phi) \} \right\} \end{aligned} \right]$$

Si l'on effectue la moyenne de $f(u,t)$ en considérant les termes lentement variables comme des constantes, il restera :

$$\overline{f(u,t)} = \left[\begin{aligned} & - \frac{1}{2\omega_0} \left\{ \mp A' \sin(\Omega t \mp \phi) + B' \cos(\Omega t \mp \phi) \right\} \\ & - \frac{1}{2a\omega_0} \left\{ A' \cos(\Omega t \mp \phi) \pm B' \sin(\Omega t \mp \phi) \right\} \end{aligned} \right]$$

ANNEXE 9.1

a) Détermination des racines de l'équation (9.15)

Reprenons l'équation (9.15) en posant $\omega^2/\omega_0^2 = u^2 = v$,
 $\omega_p^2/\omega_0^2 = u_p^2 = v_p$, $\omega_L^2/\omega_0^2 = u_L^2 = v_L$

$$v^2 - v(v_p + v_L) + v_L = 0 \quad (\text{A.9.1})$$

Le discriminant s'écrit :

$$(v_p + v_L)^2 - 4v_L > (1 + v_L)^2 - 4v_L = (1 - v_L)^2 > 0 \quad (\text{A.9.2})$$

car $v_p = 1 + v_d$ cf. (4.4) avec $v_d = u_d^2 = \omega_d^2/\omega_0^2$.

L'équation (A.9.1) admet donc deux racines positives car il y a deux changements de signe dans le trinôme. Ces racines sont situées de part et d'autre de la valeur 1 puisque les pôles et les zéros sont entrelacés. Soient v_1 la plus petite et v_2 la plus grande de ces racines :

$$v_1 = \frac{(v_p + v_L) - \sqrt{(v_p + v_L)^2 - 4v_L}}{2} \quad (\text{A.9.3})$$

$$v_2 = \frac{(v_p + v_L) + \sqrt{(v_p + v_L)^2 - 4v_L}}{2}$$

b) Evolution des écarts $f_0 - f_1$ et $f_2 - f_0$

$$\text{Posons } \alpha_1 = 1 - v_1 = 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} \rightarrow \omega_1^2 = \omega_0^2 (1 - \alpha_1)$$

$$\text{donc } f_1 = f_0 \sqrt{1 - \alpha_1} \rightarrow f_0 - f_1 = f_0 (1 - \sqrt{1 - \alpha_1}) \quad (\text{A.9.4})$$

$$\text{De même } \alpha_2 = v_2 - 1 = \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2} - 1 \rightarrow \omega_2^2 = \omega_0^2 (1 + \alpha_2)$$

$$\text{donc } f_2 = f_0 \sqrt{1 + \alpha_2} \rightarrow f_2 - f_0 = f_0 (\sqrt{1 + \alpha_2} - 1) \quad (\text{A.9.5})$$

Les courbes représentatives de (A.9.4) et (A.9.5) sont tracées sur la figure 9.10.

c) Détermination de L_0 pour un écart $|f_1 - f_0|$ maximal

La valeur absolue $|f_1 - f_0| = \inf (f_0 - f_1, f_2 - f_0)$ est maximale lorsque $f_0 - f_1 = f_2 - f_0$ c'est-à-dire lorsque :

$$1 - v_1 = v_2 - 1 \quad (\text{A.9.6})$$

Compte tenu de (A.9.3), la relation (A.9.6) s'écrit :

$$\begin{aligned} 2 - (v_p + v_L) + \sqrt{(v_p + v_L)^2 - 4v_L} &= (v_p + v_L) + \sqrt{(v_p + v_L)^2 - 4v_L} - 2 \\ \rightarrow v_p + v_L &= 2 \end{aligned} \quad (\text{A.9.7})$$

En revenant aux définitions (4.4) et (9.13) nous obtenons :

$$v_p + v_L = 1 + \frac{C_1}{C_0} + \frac{L_1 C_1}{L_0 C_0} = 2 \rightarrow \frac{L_0 C_1 + L_1 C_1}{L_0 C_0} = 1 \quad (\text{A.9.8})$$

$$\text{d'où nous tirons : } L_0 = \frac{L_1 C_1}{C_0 - C_1} \approx L_1 \frac{C_1}{C_0} \quad (\text{A.9.9})$$

valeur obtenue pour $v_L = 1$ (A.9.10)

d) Détermination de l'écart $|f_1 - f_0|$ maximal :

Compte tenu de (A.9.10) nous pouvons exprimer α_1 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{2 - (2 + v_d) + \sqrt{(2 + v_d)^2 - 4}}{2} = \frac{-v_d + 2\sqrt{v_d}}{2} \\ &= u_d \left(1 - \frac{u_d}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.9.11})$$

Rappelons ici que $u_d = \sqrt{\frac{C_1}{C_0}} \approx 10^{-2}$ ce qui permet d'écrire :

$$\alpha_1 \approx u_d$$

En reportant cette valeur dans A.9.4, nous obtenons :

$$f_0 - f_1 = f_0 (1 - \sqrt{1 - u_d}) \approx f_0 \left(1 - \left(1 - \frac{u_d}{2}\right)\right) = \frac{f_0 u_d}{2}$$

c'est-à-dire :

$$f_0 - f_1 = f_2 - f_0 = \frac{f_0}{2} \sqrt{\frac{C_1}{C_0}}$$

BIBLIOGRAPHIE

- 1 - F. MILSANT : *'Contre-réaction, oscillation, alimentation'*.
Cours d'Electronique, Edition Eyrolles, tome IV, p. 55 et ss., 1975.
- 2 - M.M. DRISCOLL : *"Two-stage self-limiting series mode type quartz-crystal oscillator exhibiting improved short-term frequency stability"*.
IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. IM. 22, n° 2, pp. 130-138, june 1973.
- 3 - E. HAFNER : *"The effect of noise on crystal oscillators"*.
IEEE-NASA Symposium on short term frequency stability, Goddard Space Flight Center, pp. 125-147, Greenbelt, Maryland, Nov. 1964.
- 4 - A.A. KHARKEVITCH : *"Phénomènes non linéaires et paramétriques en électronique"*.
Monographies Dunod, p. 74 et ss., Paris, 1960.
- 5 - ANDRONOV, A.A. VITT, S.E. KHAIKIN : *"Theory of oscillators"*.
International series of monographs in physics, vol. 4, ch. 9, Pergamon Press, 1966.
- 6 - A. PAPOULIS : *"Probability, random variables and stochastic processes"*.
International Student Edition, ch. 10, Mc Graw Hill Book Co., 1965.
- 7 - M. ROSENBLATT : *"Random processes"*.
Oxford University Press, 1962.
- 8 - W. FELLER : *"An introduction to probability theory and its applications"*.
vol. 1, 3rd edition, Sec. VI. 5, Wiley International Edition, 1968.
- 9 - D.K.C. Mc DONALD : *"Noise and fluctuations"*.
ch. 2, John Wiley and Sons, 1962.
- 10 - A. PAPOULIS : *"The Fourier integral and its applications"*.
Electronic Sciences Series, Sec. 5. 2, Mc Graw Hill, 1962.
- 11 - W.B. DAVENPORT, W.L. ROOT : *"Random signal and noise"*.
Lincoln Laboratory Publications, ch. 9, Mc Graw Hill, 1958.
- 12 - COLLOQUE DU CNRS : *"Le bruit de fond des composants actifs semi-conducteurs"*.
n° 204, Toulouse : sept. 1971, Editions du CNRS, 1972.
- 13 - J.-J. GAGNEPAIN : *"Mécanismes non linéaires dans les résonateurs à quartz"*.
Thèse d'Etat, Université de Besançon, 1972.
- 14 - L.S. CUTLER, C.L. SEARLE : *"Some aspects of the theory and measurement of frequency fluctuations in frequency standards"*.
Proceedings of the IEEE, vol. 54, n° 2, pp. 136-154, feb. 1966.
- 15 - E.J. BAGHDADY, R.N. LINCOLN, B.D. NELIN : *"Short term frequency stability : characterization, theory and measurement"*.
IEEE-NASA Symposium, op. cit. pp. 65-87.

- 16 - J. RUTMAN : *"Sur les générateurs de fréquence de très hautes performances"*.
ONERA, publication n° 142, 1972.
- 17 - A. BLAQUIERE : *"Effet du bruit de fond sur la fréquence des autooscillateurs à lampes. Précision ultime des horloges radioélectriques"*.
Annales de Radioélectricité, vol. 8, n° 31, pp. 36-80, Jan. 1953.
- 18 - A. BLAQUIERE : *"Spectre de puissance d'un autooscillateur non linéaire perturbé par le bruit"*.
Annales de Radioélectricité, vol. 8, n° 32, pp. 153-179, Avr. 1953.
- 19 - S. GOLDMANN : *Frequency analysis, modulation and noise*.
Radiocommunication series, ch. VI et ss. Mc Graw Hill, 1948.
- 20 - R.B. BLACKMAN, J.W. TUKEY : *"The measurement of power spectra"*.
Dover Publications, 1958.
- 21 - C.H. PAGE : *"Instantaneous power spectra"*.
Journal of Applied Physics, vol. 23, n° 1, pp. 103-106, jan. 1952.
- 22 - A. ANGOT : *"Complements de mathématiques"*.
6ème Edition, ch. 9, Masson, 1972.
- 23 - J. BASS : *"Cours de mathématiques"*.
4ème Edition, tome 1, § 21.7, Masson, 1968.
- 24 - J.A. BARNES et al. : *"Characterization of frequency stability"*.
IEEE Trans. on instrumentation and measurement, vol. IM. 20, n° 2, pp. 105-120, may 1971.
- 25 - R.E. BARBER : *"Short-term frequency stability of precision oscillators and frequency generators"*.
Bell System Technical Journal, vol. 50, n° 3, pp. 881-915, Mar. 1971.
- 26 - D.W. ALLAN : *"Statistics of atomic frequency standards"*.
Proceedings of the IEEE, vol. 54, n° 2, pp. 221-230, Feb. 1966.
- 27 - J.L. PLUMB, E.R. CHENETTE : *"Flicker noise in transistors"*.
IEEE Trans. on Electron Devices, vol. ED. 10, pp. 304-308, Sept. 1963.
- 28 - W.G. CADY : *"Piezoelectricity"*.
Vol. 1 et 2, Dover Publications, 1964.
- 29 - K.S. VAN DYKE : *"The piezoelectric resonator and its equivalent network"*.
Proceedings of the IRE, vol. 16, pp. 742-764, 1928.
- 30 - C. PEGEOT : *"Principe et réalisation d'un dispositif de mesure des paramètres du schéma équivalent d'un résonateur à quartz"*.
Thèse de Docteur Ingénieur, Université de Besançon, 1974.
- 31 - JACQUINOT, DUMESNIL, BOUGHON : *"Méthodes de mesure des constantes du dipôle équivalent à un cristal piézoélectrique, quartz-mètre"*.
L'Onde Electrique, n° 232, pp. 259-273, juillet 1946.
- 32 - E.A. GERBER, L.F. KOERNER :
"Methods of measurement of the parameters of piezoelectric vibrators".
Proceedings of the IRE, vol. 46, pp. 1731-1737, oct. 1958.

- 33 - P. ANDRIEUX : *"Formules relatives aux fréquences remarquables du dipôle équivalent à un résonateur piézoélectrique"*.
L'Onde Electrique, n^{os} 365-366, pp. 746-749, Août-Sept. 1957.
- 34 - G. MARIANNEAU : *"Stabilité à court terme et pureté spectrale des oscillateurs à quartz"*.
Thèse d'Université, Université de Besançon, 1972.
- 35 - N.N. Mc LACHLAN : *"Ordinary non-linear differential equations in engineering and physical sciences"*.
Oxford at the Clarendon Press, 1950.
- 36 - Y.A. MITROPOLSKY, V.G. KOLOMIETZ : en russe : *"Application du principe de la moyenne à l'étude de l'effet des actions aléatoires sur les systèmes oscillants"*.
Matematicheskaya Fizika, Nauka Dumla, pp. 146-168, Kiev, 1967.
- 37 - R.E. MORTENSEN : *"Mathematical problems of modeling stochastic non linear dynamic systems"*.
Journal of Statistical Physics, Plenum Press, vol. 1, n^o 2, pp. 271-296, 1969.
- 38 - A. BLANC-LAPIERRE, B. PICINBONO : *"Propriétés statistiques du bruit de fond"*.
Masson, 1961.
- 39 - S.M. RYTOV : *"Fluctuations in oscillating systems of the Thomson type I and II"*.
Soviet Physics JETP, vol. 2, n^o 2, pp. 217-235, March 1956.
- 40 - J. HAAG : *"Sur certains systèmes différentiels à solutions périodiques"*.
Bulletin des Sciences Mathématiques, 1946.
- 41 - J. HAAG : *"Les mouvements vibratoires"*.
Presses Universitaires de France, vol. 1 : 1951, vol. 2 : 1955.
- 42 - A. BLAQUIERE : *"Analyse des systèmes non linéaires"*.
Bibliothèque des Sciences et Techniques nucléaires, Presses Universitaires de France, 1966.
- 43 - M. ROSEAU : *"Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité"*.
Springer Tracts, 1966.
- 44 - N.N. BOGOLIOUBOFF, Y.A. MITROPOLSKY :
"Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires".
Gauthier Villars, 1962.
- 45 - Y.A. MITROPOLSKY : *"Problèmes de la théorie asymptotique des oscillations non stationnaires"*.
Gauthier Villars, 1966.
- 46 - R. CHALEAT, J. HAAG : *"Problèmes de chronométrie et de théorie générale des oscillations"*.
Gauthier Villars, 1960.
- 47 - J.-H. BALBI : *"Approximations supérieures de la théorie de la synchronisation de Jules Haag"*.
Thèse de 3ème cycle, Université de Besançon, 1971.

- 48 - J.-H. BALBI : *"Généralisation de la méthode de la moyenne"*.
International Journal of Non-linear Mechanics, vol. 8, Pergamon Press,
pp. 313-324, 1973.
- 49 - J.-H. BALBI : *"Construction approchée des solutions de certains systèmes différentiels à petit paramètre"*.
Non-linear Vibration Problems, vol. 14, pp. 299-308, Varsovie, 1973.
- 50 - J.-H. BALBI :
Thèse d'Etat (à paraître).
- 51 - J. GROSLAMBERT, G. MARIANNEAU, M. OLIVIER, J. UEBERSFELD :
"The design and performance of a crystal oscillator exhibiting improved short term frequency stability".
Proceedings of the 28th Annual Symposium on Frequency Control ;
U.S. Army Electronics Command, pp. 181-183, Fort Monmouth, N.J., May 1974.
- 52 - P. SIFFERT : *"Contribution à l'étude d'un oscillateur à quartz de très haute fréquence"*.
Thèse de troisième cycle, Université de Besançon, 1974.
- 53 - M. OLIVIER, J. GROSLAMBERT : *"Stabilité et pureté spectrale d'oscillateurs à quartz de très haute fréquence"*.
Proceedings du 9ème Congrès International de Chronométrie, Deutschen Gesellschaft für Chronometrie, vol. A, pp. A4.1-7, Stuttgart, Sept. 1974.
- 54 - J. GROSLAMBERT, G. MARIANNEAU, M. OLIVIER :
"Methodes expérimentales de caractérisation des oscillateurs".
L'Onde Electrique, vol. 55, n° 2, pp. 74-81, Fev. 1975.
- 55 - E.A. GUILLEMIN : *"Communication networks"*.
vol. 2 : *"The classical theory of long lines, filters and related network"*, ch. 5, John Wiley, 1935.
- 56 - J.-C. MARCHAIS : *"L'amplificateur opérationnel et ses applications"*.
ch. 6, Masson, 1971.
- 57 - A. VAN DER ZIEL : *"Noise"*.
Electrical Engineering Series, Sec. 11. 2, Prentice Hall, 1956.
- 58 - D.A. BELL : *"Electrical Noise"*.
ch. 3, Van Nostrand, 1960.
- 59 - A. VAN DER ZIEL : *"Noise : sources, characterization, measurement"*.
Information on System Sciences Series, Electrical Engineering Series,
Sec. 2. 2, Prentice Hall, 1970.

N° d'ordre : 63

N° C.N.R.S. : A.D. 11 904

Vu et permis d'imprimer
Besançon, le

Pour le Président de l'Université
Le Doyen de la Faculté des Sciences et des Techniques,

J. BERNARD

